

NAPETOSTI V TEMELJNIH TLEH

I. Napetosti v polprostoru zaradi lastne teže tal

Totalne vertikalne napetosti:

$$\sigma_{zz}(z_2) = \sigma_{zz}(z_1) + \int_{z=z_1}^{z_2} \gamma(z) dz$$

Porni tlaki:

$$u(z_2) = u(z_1) + \int_{z=z_1}^{z_2} \gamma_w dz$$

Efektivne napetosti:

$$\sigma'_{zz}(z_2) = \sigma_{zz}(z_2) - u(z_2) = \sigma'_{zz}(z_1) + \int_{z=z_1}^{z_2} (\gamma(z) - \gamma_w) dz$$

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \sigma'_{zz} K_0$$

$$\sigma'_{xy} = \sigma'_{yz} = \sigma'_{zx} = 0$$

$$K_0 = 1 - \sin \varphi' \quad , \quad K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad , \quad K_0 = \text{ocena, meritev}$$

Totalne napetosti:

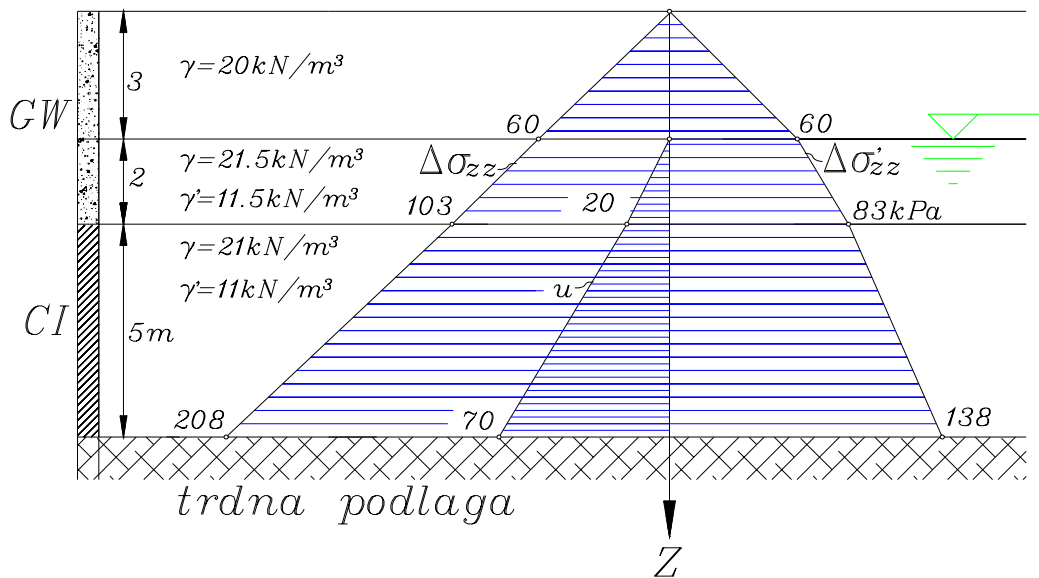
$$\sigma_{xx}(z_2) = \sigma'_{xx}(z_2) + u(z_2)$$

$$\sigma_{yy}(z_2) = \sigma'_{yy}(z_2) + u(z_2)$$

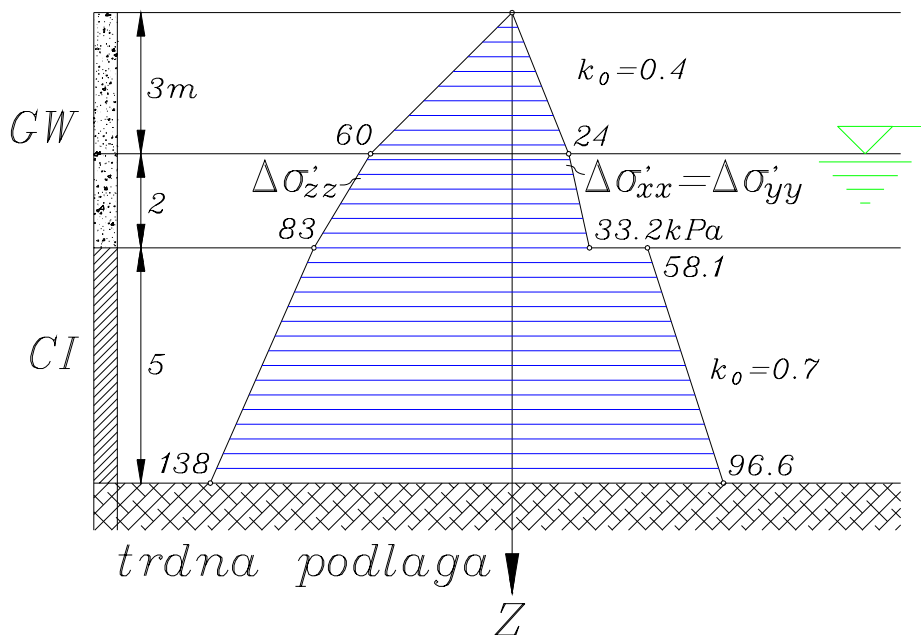
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

Napetostno stanje je v polprostoru zaradi lastne teže tal osno-simetrično. Vertikalne napetosti se po posameznemu sloju zemljine, ki sestavlja temeljna tla, spreminjajo (večajo z globino) linearno. Diagram vertikalnih

napetosti je z globino zvezen (na mejnicah posameznih slojev ni preskokov).



Slika 1: Diagram totalnih in efektivnih vertikalnih napetosti v temeljnih tleh zaradi lastne teže tal



Slika 2: Diagram efektivnih vertikalnih in vodoravnih napetosti v temeljnih tleh zaradi lastne teže tal

Vodoravne napetosti se po posameznemu sloju zemljine, ki sestavlja temeljna tla, spreminjajo (večajo z globino) linearno. Diagram vodoravnih napetosti z globino ni zvezen (na mejnicah posameznih slojev so preskoki zaradi različnega količnika mirnega zemeljskega pritiska K_0). Strižne napetosti so nične zaradi osne simetrije.

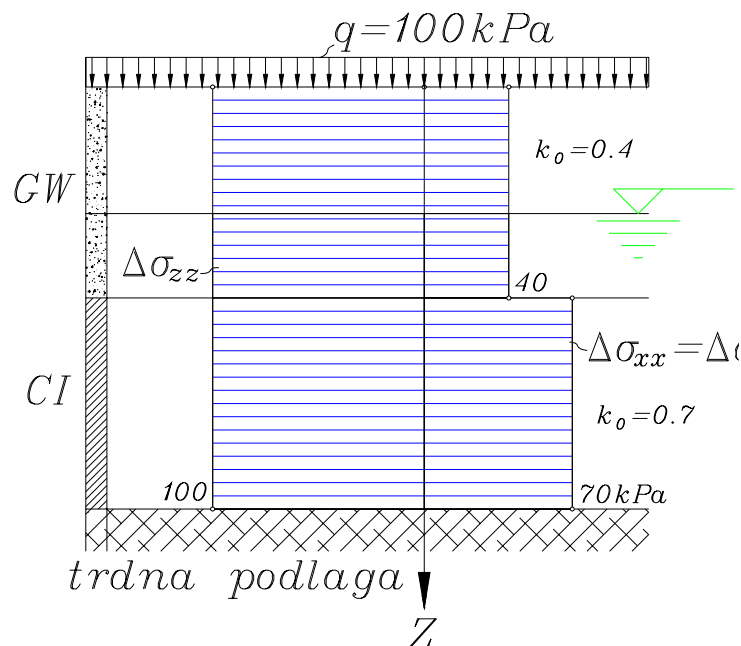
II. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi brezkraino široke in dolge obtežbe na površju temeljnih tal

Dodatne napetosti v polprostoru, ki jih povzročata brezkraino široka in dolga enakomerna obtežba na površju temeljnih tal, lahko izračunamo tako, da si mislimo, da je dejansko površje temeljnih tal višje ($\Delta h = q / \gamma$):

$$\Delta\sigma_{zz}(z) = q = konst.$$

$$\Delta\sigma_{xx}(z) = \Delta\sigma_{yy}(z) = q K_0(z)$$

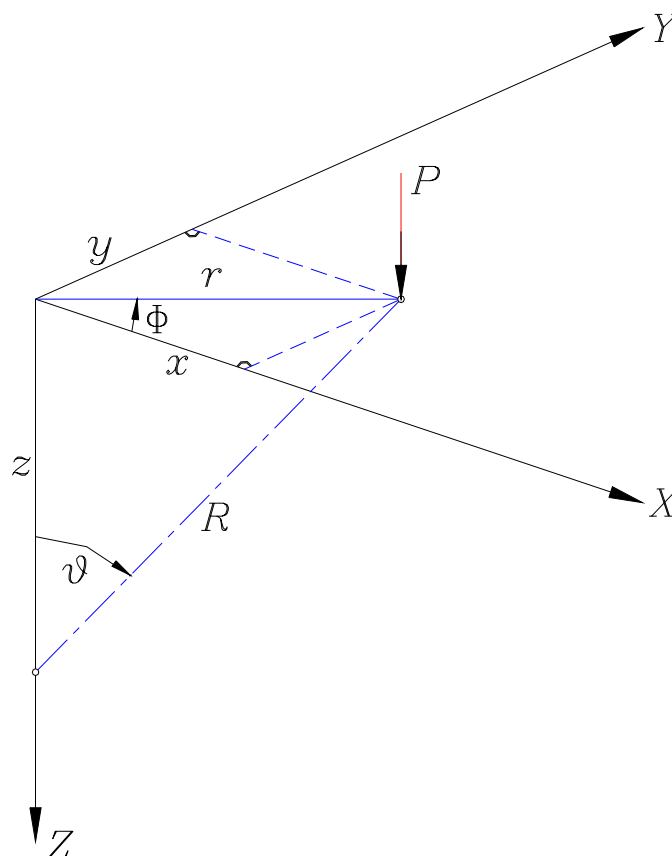
$$\Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma_{zx} = 0$$



Slika 3: Diagram dodatnih napetosti zaradi brezkraino široke obtežbe

Dodatne napetosti so v polprostoru zaradi brezokrajno široke in dolge enakomerne obtežbe, ki deluje na površju temeljnih tal osno-simetrične. Dodatne vertikalne napetosti so v vsaki točki polprostora enako velike. Diagram dodatnih vertikalnih napetosti je z globino konstanten. Dodatne vodoravne napetosti se po posameznemu sloju zemljine, ki sestavlja temeljna tla, ne spreminjajo (se ne večajo z globino). Diagram dodatnih vodoravnih napetosti z globino ni zvezen (na mejnicah posameznih slojev so preskoki). Dodatne strižne napetosti so nične v posameznih slojih (osno-simetrija). Na mejnicah različno deformabilnih slojev so dodatne strižne napetosti zaradi ničnih deformacij različne od nič (razlika ustreznih dodatnih normalnih vodoravnih napetosti).

III. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi točkovne sile na površju temeljnih tal



Slika 4: Obremenitev temeljnih tal s točkovno silo

Boussinesq (1885):

Zapis v cilindričnem koordinatnem sistemu:

$$\Delta\sigma_r = \frac{P}{2\pi R^2} \left(3\sin^2 \vartheta \cos \vartheta - \frac{1-2\nu}{1+\cos \vartheta} \right)$$

$$\Delta\sigma_t = \frac{P}{2\pi R^2} (1-2\nu) \left(\frac{1}{1+\cos \vartheta} - \cos \vartheta \right)$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$\Delta\tau = \sigma_{rz} = \frac{3P}{2\pi R^2} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta$$

Geometrijske količine:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\sin \vartheta = \frac{r}{R} \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{R}$$

$$\sin \phi = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos \phi = \frac{x}{r}$$

Zapis v Kartezijevem koordinatnem sistemu:

$$\Delta\sigma_{xx} = \Delta\sigma_r \cos^2 \phi + \Delta\sigma_t \sin^2 \phi$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \Delta\sigma_r \sin^2 \phi + \Delta\sigma_t \cos^2 \phi$$

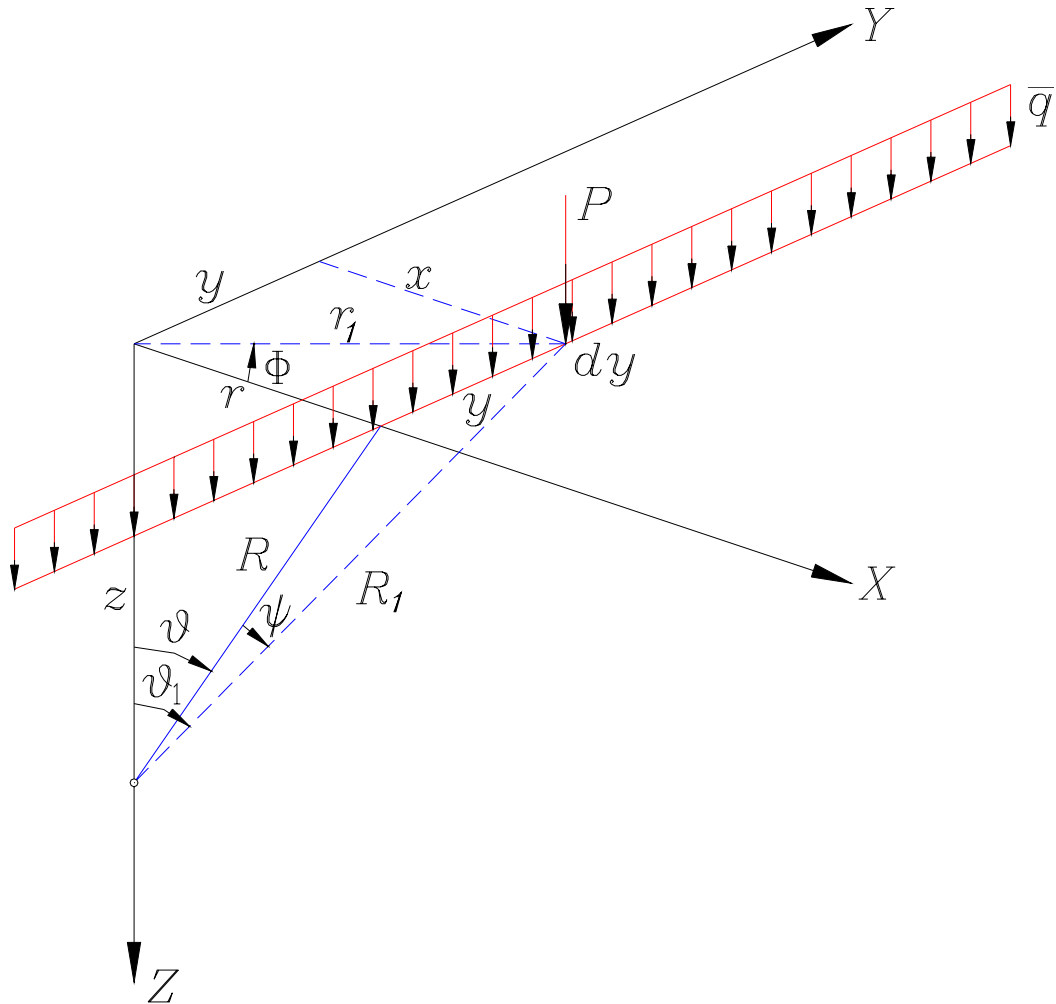
$$\Delta\sigma_{zz} = \Delta\sigma_z$$

$$\Delta\sigma_{xy} = (\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_t) \sin \phi \cos \phi$$

$$\Delta\sigma_{yz} = \Delta\tau \cos \phi$$

$$\Delta\sigma_{zx} = \Delta\tau \sin \phi$$

IV. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi brezkrajne linijske (črtne) obtežbe na površju temeljnih tal



Slika 5: Obremenitev temeljnih tal z linijsko obtežbo

$$P = \bar{q} dy$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \int_{y=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\bar{q} dy}{2\pi R_1^2} \left(3\sin^2 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 - \frac{1-2\nu}{1+\cos \vartheta_1} \right) \cos^2 \phi + \frac{\bar{q} dy}{2\pi R_1^2} (1-2\nu) \left(\frac{1}{1+\cos \vartheta_1} - \cos \vartheta_1 \right) \sin^2 \phi \right]$$

Izpeljava enačbe za $\nu = 0.5$:

$$\Delta\sigma_{xx} = \int_{y=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\bar{q} dy}{2\pi R_1^2} (3\sin^2 \vartheta_1 \cos \vartheta_1) \cos^2 \phi \right]$$

$$R_1 = R_1(y) \quad , \quad \vartheta_1 = \vartheta_1(y)$$

Do končnega rezultata pridemo lažje, če izvedemo integracijo po spremenljivki ψ .

$$y = R \tan \psi \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{R d\psi}{\cos^2 \psi}$$

$$\cos \phi = \frac{r}{r_1} \quad , \quad \cos \psi = \frac{R}{R_1} \quad , \quad \sin \vartheta = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta \cos \psi}{\cos \phi}$$

$$R_1 = \frac{z}{\cos \vartheta_1} \quad , \quad R = \frac{z}{\cos \vartheta}$$

$$\cos \psi = \frac{R}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R}{\cos \psi} \quad , \quad \cos \vartheta_1 = \cos \vartheta \cos \psi$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\bar{q} \left(\frac{R d\psi}{\cos^2 \psi} \right)}{2\pi \left(\frac{R}{\cos \psi} \right)^2} \left[3 \left(\frac{\sin \vartheta \cos \psi}{\cos \phi} \right)^2 (\cos \vartheta \cos \psi) \right] \cos^2 \phi$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{3\bar{q} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta}{2\pi R} \int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi d\psi$$

$$\int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi d\psi = \left[\sin \psi - \frac{1}{3} \sin^3 \psi \right]_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} = \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3}$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

Dodatne vertikalne napetosti:

$$\Delta\sigma_{zz} = \int_{y=-\infty}^{\infty} \frac{3\bar{q} dy}{2\pi R_1^2} \cos^3 \vartheta_1 = \int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\bar{q} \left(\frac{R d\psi}{\cos^2 \psi} \right)}{2\pi \left(\frac{R}{\cos \psi} \right)^2} (\cos \vartheta \cos \psi)^3$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{3\bar{q} \cos^3 \vartheta}{2\pi R} \int_{\psi=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \psi d\psi$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \cos^3 \vartheta$$

Celoten tenzor dodatnih napetosti:

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \nu \cos \vartheta$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \cos^3 \vartheta$$

$$\Delta\sigma_{xy} = 0 \quad , \quad \Delta\sigma_{yz} = 0$$

$$\Delta\sigma_{zx} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta$$

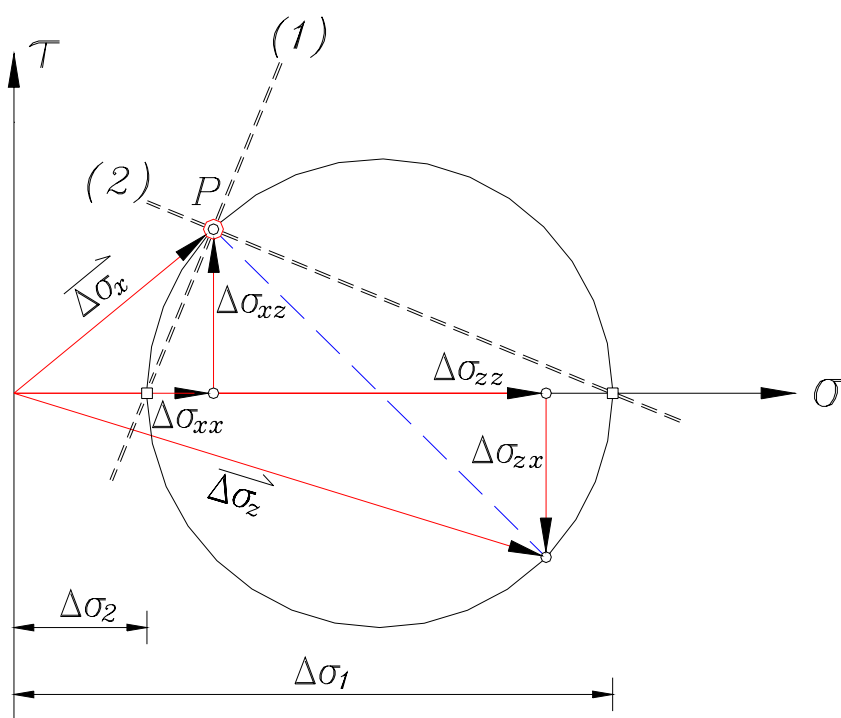
Geometrijske količine:

$$R = \sqrt{x^2 + z^2} \quad , \quad \sin \vartheta = \frac{x}{R} \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{R}$$

Brezkrajna linijska obtežba povzroči v polprostoru ravninsko deformacijsko stanje: $\varepsilon_{yy} = 0$, $\Delta\sigma_{yy} = \nu(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz})$.

V ravnini (x, z) so vse napetosti neodvisne od kvalitete zemljine. Vsi diagrami dodatnih napetosti, ki jih povzroči brezkraina linijska obtežba so z globino zvezni (ni preskokov na mejnicah slojev različnih zemljin).

V primeru ravninskega deformacijskega stanja, lahko izračunamo glavni napetosti σ_1 in σ_2 v ravnini (x, z) na preprost način iz Mohrovega napetostnega kroga. Tretja glavna napetost σ_3 je enaka napetosti $\Delta\sigma_{yy}$.



Slika 6: Mohrov napetostni krog za napetosti v ravnini (x, z)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{xz}^2}$$

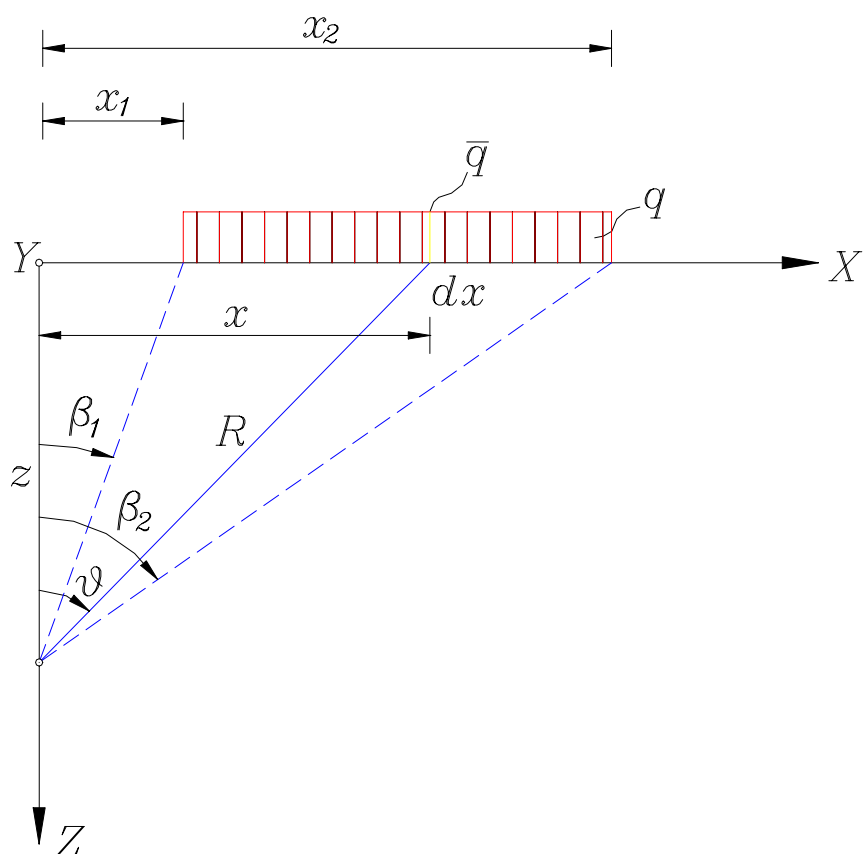
Gornja enačba velja tudi za prirastke napetosti. Za linijsko obtežbo tako dobimo prirastek glavnih napetosti po enačbah:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \cos \vartheta$$

$$\Delta\sigma_2 = 0$$

$$\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_{yy} = \frac{2\bar{q}}{\pi R} \nu \cos \vartheta$$

V. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi brezkrajne pasovne (trakaste) obtežbe na površju temeljnih tal



Slika 7: Obremenitev temeljnih tal s pasovno obtežbo

$$\bar{q} = q dx$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \int_{x=x_1}^{x_2} \frac{2q dx}{\pi R} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta$$

$$R = R(x) \quad , \quad \vartheta = \vartheta(x)$$

Do končnega rezultata pridemo lažje, če izvedemo integracijo po spremenljivki ϑ .

$$x = z \tan \vartheta \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{z}{\cos \vartheta}$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \int_{\vartheta=\beta_1}^{\beta_2} \frac{2q \left(\frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right)}{\pi \left(\frac{z}{\cos \vartheta} \right)} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = \frac{2q}{\pi} \int_{\vartheta=\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \vartheta d\vartheta$$

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta=\beta_1}^{\beta_2} \sin^2 \vartheta d\vartheta &= \left[\frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \right]_{\vartheta=\beta_1}^{\beta_2} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \beta_2 - \frac{1}{4} \sin 2\beta_2 - \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{4} \sin 2\beta_1 \right] \end{aligned}$$

$$\tan \beta_1 = \frac{x_1}{z} \quad , \quad \tan \beta_2 = \frac{x_2}{z}$$

Uvedemo substituciji:

$$2\varepsilon = \beta_2 - \beta_1 \quad , \quad 2\psi = \beta_2 + \beta_1$$

$$\frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{4}(\sin 2\beta_2 - \sin 2\beta_1) = \frac{1}{2}[2\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\psi]$$

$$\boxed{\Delta \sigma_{xx} = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\psi)}$$

Celoten napetostni tenzor:

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{q}{\pi}(2\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\psi)$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \frac{2q}{\pi} \nu 2\varepsilon$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{\pi}(2\varepsilon + \sin 2\varepsilon \cos 2\psi)$$

$$\Delta\sigma_{xy} = 0$$

$$\Delta\sigma_{yz} = 0$$

$$\Delta\sigma_{xz} = \frac{q}{\pi} \sin 2\varepsilon \sin 2\psi$$

Geometrijske količine:

$$2\varepsilon = \beta_2 - \beta_1 \quad , \quad 2\psi = \beta_2 + \beta_1$$

$$\tan \beta_1 = \frac{x_1}{z} \quad , \quad \tan \beta_2 = \frac{x_2}{z}$$

Brezkrajna linijska obtežba povzroči v polprostoru ravninsko deformacijsko stanje: $\varepsilon_{yy} = 0$, $\Delta\sigma_{yy} = \nu(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz})$.

V ravnini (x, z) so vse dodatne napetosti neodvisne od kvalitete zemljine. Vsi diagrami dodatnih napetosti, ki jih povzroči brezkraina linijska obtežba so z globino zvezni (ni preskokov na mejnicah slojev različnih zemljin).

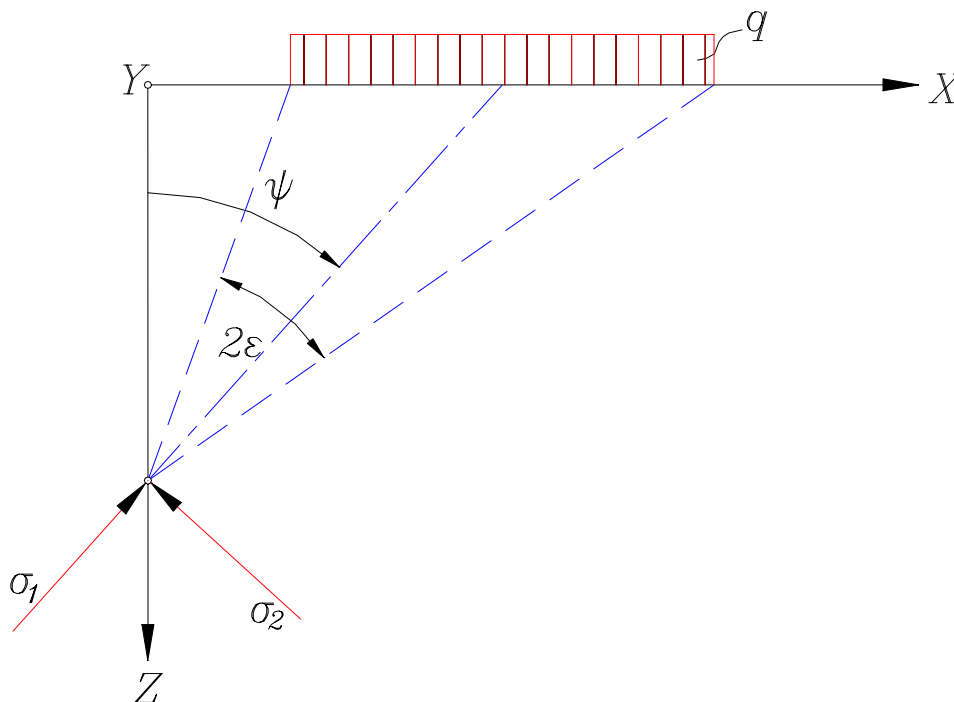
Podobno kot smo izračunali prirastke glavnih napetosti v primeru brezkraine linijske obtežbe, tako izračunamo tudi prirastke glavnih napetosti za brezkraino pasovno obtežbo (ravninsko deformacijsko stanje):

$$\Delta\sigma_1 = \frac{q}{\pi}(2\varepsilon + \sin 2\varepsilon)$$

$$\Delta\sigma_2 = \frac{q}{\pi}(2\varepsilon - \sin 2\varepsilon)$$

$$\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_{yy} = \frac{2\bar{q}}{\pi} \nu 2\varepsilon$$

Smer prirastka večje glavne napetosti oklepa kot ψ z navpično osjo (poteka po simetrali kota med tvorilkama, ki povezujeta točko v polprostoru s krajiščema pasovne obtežbe na površju temeljnih tal). Smer prirastka druge glavne napetosti je pravokotna na smer prirastka prve glavne napetosti, smer prirastka tretje glavne napetosti pa ima smer osi y . Smeri prirastkov glavnih napetosti v ravnini x, z ponazarjajo tangente na hiperbole (σ_1) in tangente na elipse (σ_2), katerih žarišči sta krajišči pasovne obtežbe na površju tal.



Slika 8: Smeri dodatnih glavnih napetosti v temeljnih tleh zaradi pasovne obremenitve

VI. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi obtežbe pravokotne tlorisne oblike na površju temeljnih tal (v navpičnici skozi vogal obtežbe)

Načeloma bi lahko prišli do izrazov za napetosti tenzor, ki je posledica obremenitve tal z obtežbo pravokotne tlorisne oblike tako, da bi uporabili rešitev Boussinesqa za točkovno silo in izvedli ustrezne integracije. Primer za vertikalne napetosti:

$$P \Rightarrow \Delta\sigma_{zz} = \frac{3P}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$P = q dA \Rightarrow \Delta\sigma_{zz} = \int_A \frac{3q dA}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

ali:

$$dA = dx dy \Rightarrow P = q dx dy \Rightarrow$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \frac{3q dx dy}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

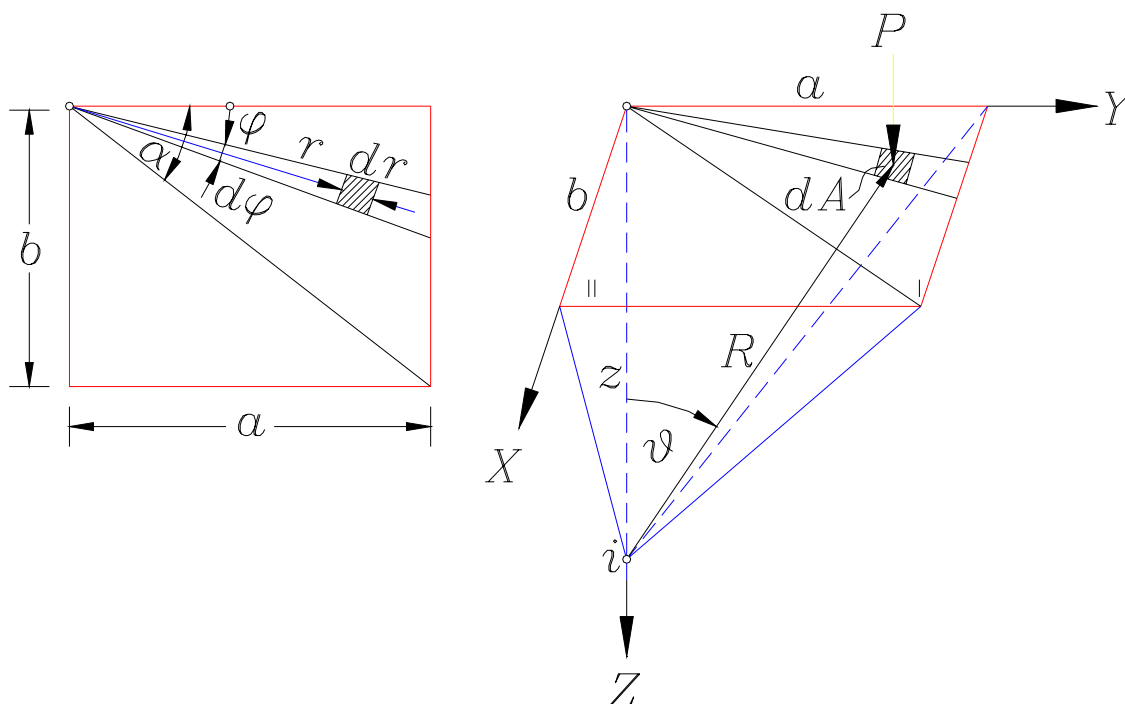
$$R = R(x, y) \quad , \quad \vartheta = \vartheta(x, y)$$

Za poljubno navpičnico, ki bi potekala skozi poljubno točko znotraj obrisa obtežbe pravokotne tlorisne oblike ne dobimo analitičnega izraza za dodatne napetosti. Integracija nas privede do eliptičnega integrala, ki je rešljiv za konkretne podatke. Analitičen izraz za dodatne napetosti dobimo samo za navpičnice, ki potekajo skozi vogal obtežbe pravokotne tlorisne oblike. Če označimo daljšo stranico pravokotne obtežbe z a (v smeri osi y), krajšo pa z b (v smeri osi x), bi lahko dobili izraz za dodatne vertikalne napetosti na naslednji način:

$$\Delta\sigma_{zz} = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{3q dx dy}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$R = R(x, y) \quad , \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y)$$

Do rešitve je na bolj preprost način prišel Steinbrenner (1934). Obtežbo pravokotne tlorisne oblike je razdelil na dve obtežbi, ki imata v tlorisu obliko pravokotnih trikotnikov. Oglišča obeh trikotnikov so oglišča pravokotnika. Integracijo je Steinbrenner izvedel za vsako obtežbo trikotne tlorisne oblike posebej z uvedbo novih spremenljivk, na koncu pa je rešitvi za trikotni tlorisni obtežbi seštel.



Slika 9: Obremenitev temeljnih tal z enakomerno obtežbo pravokotne tlorisne oblike

Prva obtežba trikotne tlorisne oblike (I):

$$dA = r dr d\phi \Rightarrow P = q r dr d\phi \Rightarrow$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \int_{\phi=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{a/\cos\phi} \frac{3q r dr d\phi}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$R = R(r, \phi) \quad , \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(r, \phi)$$

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\Delta \sigma_{zz} = \int_{\phi=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{a/\cos\phi} \frac{3qr \, dr \, d\phi}{2\pi(r^2 + z^2)} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3 = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{\phi=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{a/\cos\phi} \frac{r \, dr \, d\phi}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\Delta \sigma_{zz}(I) = \frac{q}{2\pi} \left[2\alpha - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{a^2 + z^2 - z\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}{ab} + \right. \\ \left. + \frac{abz}{(a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right]$$

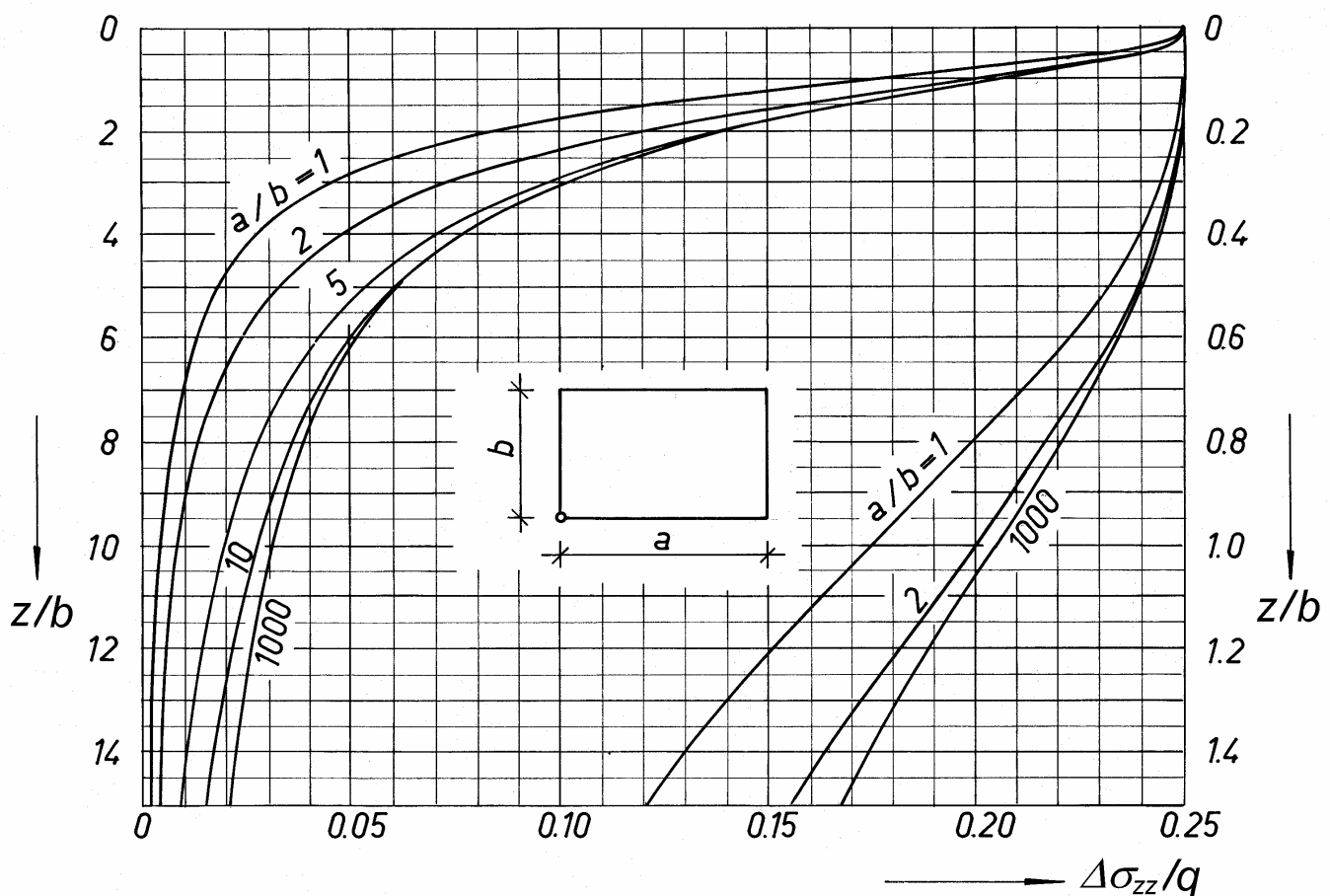
Za drugo obtežbo trikotne tlorisne oblike se dobi podoben izraz:

$$\Delta \sigma_{zz}(II) = \frac{q}{2\pi} \left[2\beta - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{b^2 + z^2 - z\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}{ab} + \right. \\ \left. + \frac{abz}{(b^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \right]$$

Za obtežbo pravokotne tlorisne oblike dobimo izraz za vertikalne napetosti, če seštejemo izraza za obe obtežbi trikotne tlorisne oblike. Steinbrenner je podal izraz v obliki, ki omogoča izračun vertikalnih dodatnih napetosti v navpičnici skozi oglišče obtežbe pravokotne tlorisne oblike s pomočjo diagramov ali tabel, pa tudi analitično.

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} \left[\arctan \frac{\frac{a}{b}}{\frac{z}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} + \left(\frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} + \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} \right) \frac{\frac{z}{b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \right]$$

Steinbrenner je podal rešitve za vertikalne dodatne napetosti v brezdimenzionalnih diagramih. Količnik $\Delta\sigma_{zz}/q$ lahko dobimo v poljubni globini polprostora pod vogalno točko obtežbe pravokotne tlorisne oblike (količnik z/b) za poljubno razmerje stranic a/b obtežbe pravokotne tlorisne oblike.



Slika 10: Steinbrennerjevi diagrami za izračun dodatnih vertikalnih napetosti pod vogalno točko obtežbe pravokotne tlorisne oblike

Celoten napetostni tenzor:

$$A = \sqrt{a^2 + z^2} \quad , \quad B = \sqrt{b^2 + z^2} \quad , \quad C = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \Delta\sigma_{bb} = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\arctan \frac{ab}{zC} - \frac{abz}{B^2C} \right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\nu) \left(\arctan \frac{a}{b} - \arctan \frac{aC}{bz} \right) \right]$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \Delta\sigma_{aa} = \frac{q}{2\pi} \left[\left(\arctan \frac{ab}{zC} - \frac{abz}{A^2C} \right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\nu) \left(\arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{bC}{az} \right) \right]$$

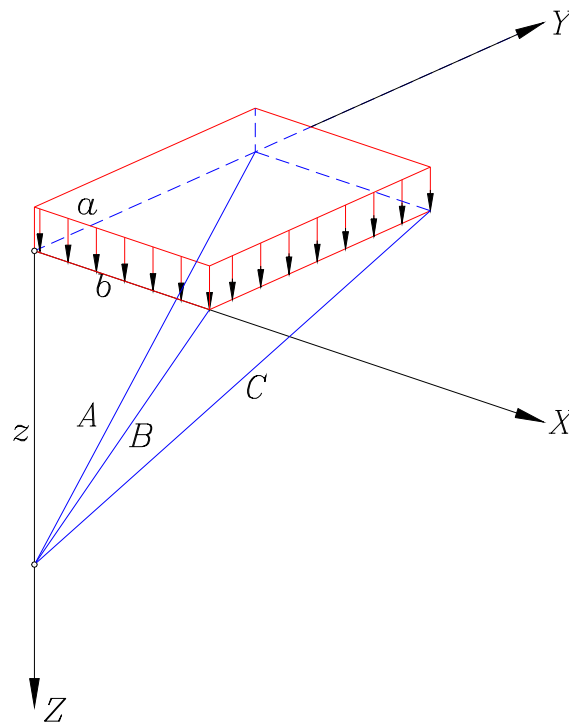
$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} \left[\arctan \frac{ab}{zC} + \frac{abz(A^2 + B^2)}{A^2B^2C} \right]$$

$$\Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma_{ba} = \frac{q}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{z}{A} - \frac{z}{B} + \frac{z}{C} \right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\nu) \left(\ln \frac{2z}{z+B} + \ln \frac{z+C}{z+A} \right) \right]$$

$$\Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma_{az} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{a}{A} - \frac{az^2}{B^2C} \right)$$

$$\Delta\sigma_{zx} = \Delta\sigma_{zb} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{b}{B} - \frac{bz^2}{A^2C} \right)$$

Rešitve, ki jih dobimo za dodatne napetosti v navpičnici skozi oglišče obtežbe pravokotne tlorisne oblike, lahko smiselno uporabimo za izračun dodatnih napetosti v različnih navpičnicah pod poljubnimi oglatimi obtežbami. Ker velja načelo superpozicije, lahko poljubno oglate obtežbo razdelimo na ustrezno število obtežb pravokotne tlorisne oblike. Če iščemo napetosti v navpičnici skozi izbrano točko (i), potem mora biti ta točka (v tlorisu) vedno oglišče vseh obtežb pravokotnih tlorisnih oblik na katere smo razdelili obtežbo oglate tlorisne oblike. S seštevanjem vplivov posameznih obtežbenih likov (+ če je obremenitev pozitivna in – za negativno obremenitev) dobimo v izbrani globini vrednost ustrezne dodatne napetosti, ki jo povzroči na površju temeljnih tal delujoča obtežba oglate tlorisne oblike.



Slika 11: Oznake za izračun dodatnih napetosti pod vogalno točko obtežbe pravokotne tlorisne oblike

Kontrolo ali smo obtežbo oglate tlorisne oblike v točki (i) pravilno razdelili na ustrezno število obtežb pravokotnih tlorisnih oblik, katerim skupna točka (i) je tudi vedno oglišče, naredimo po naslednjem preudarku. Za dodatne vertikalne napetosti ($\Delta\sigma_{zz}$) tik pod gibko obtežbo **na površju** ($z = 0$) veljajo naslednja pravila:

1. če leži točka (i) znotraj konture tlorisa obtežbe so dodatne vertikalne napetosti enake obtežbi ($\Delta\sigma_{zz} = q$),
2. če leži točka (i) zunaj konture tlorisa obtežbe so dodatne vertikalne napetosti nične ($\Delta\sigma_{zz} = 0$) in
3. če leži točka na konturi (robu) tlorisa obtežbe so dodatne vertikalne napetosti enake delu obtežbe ($\Delta\sigma_{zz} = q\beta / 360^\circ$). Kot β je notranji kot, ki ga oklepata tangenti na konturo (rob) obtežbe v točki (i).

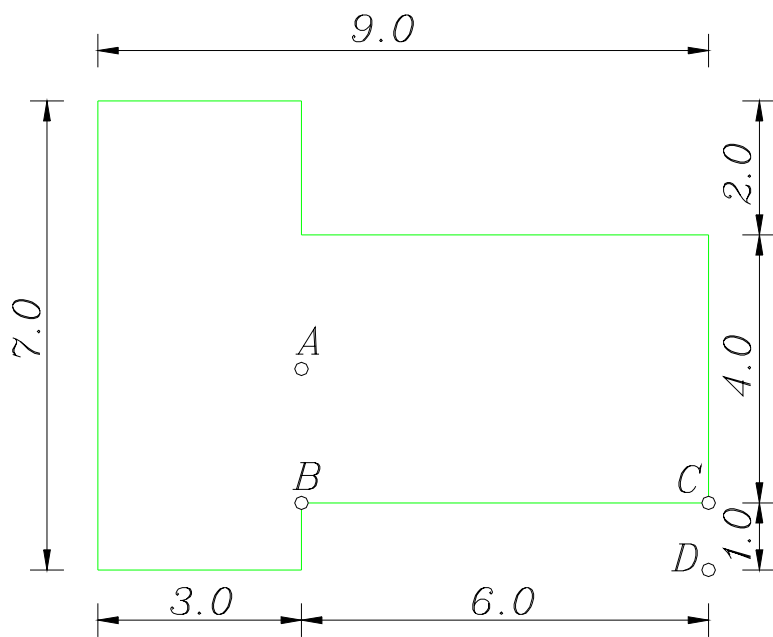
V globini $z = 0$ dobimo v oglišču obtežbe pravokotne tlorisne oblike vrednost dodatne vertikalne napetosti v velikosti $0.25 q$. Če je točka (i) znotraj konture obtežbe pravokotne tlorisne oblike, moramo takšno obtežbo razdeliti na 4 ustrezne obtežbe pravokotne tlorisne oblike ($\Delta\sigma_{zz} = 0.25 q + 0.25 q + 0.25 q + 0.25 q = q$). Če je točka (i) na robu (konturi) obtežbe pravokotne tlorisne oblike, moramo takšno obtežbo razdeliti na 2 ustrezni obtežbi pravokotne tlorisne oblike ($\Delta\sigma_{zz} = 0.25 q + 0.25 q = 0.5 q$).

Enačbe, ki smo jih izvedli za izračun dodatnih napetosti v navpičnici skozi oglišče obtežbe pravokotne tlorisne oblike, ter načelo superpozicije, lahko uporabimo tudi za izračun dodatnih napetosti, ki jih v temeljnih tleh povzroči brezkrajna pasovna (trakasta) obtežba na površju temeljnih tal. Pri tlorisnem razrezu pasovne obtežbe dobimo ustrezno število obtežb pravokotne tlorisne oblike, za katere je vedno razmerje daljše proti krajši stranici enako neskončno.

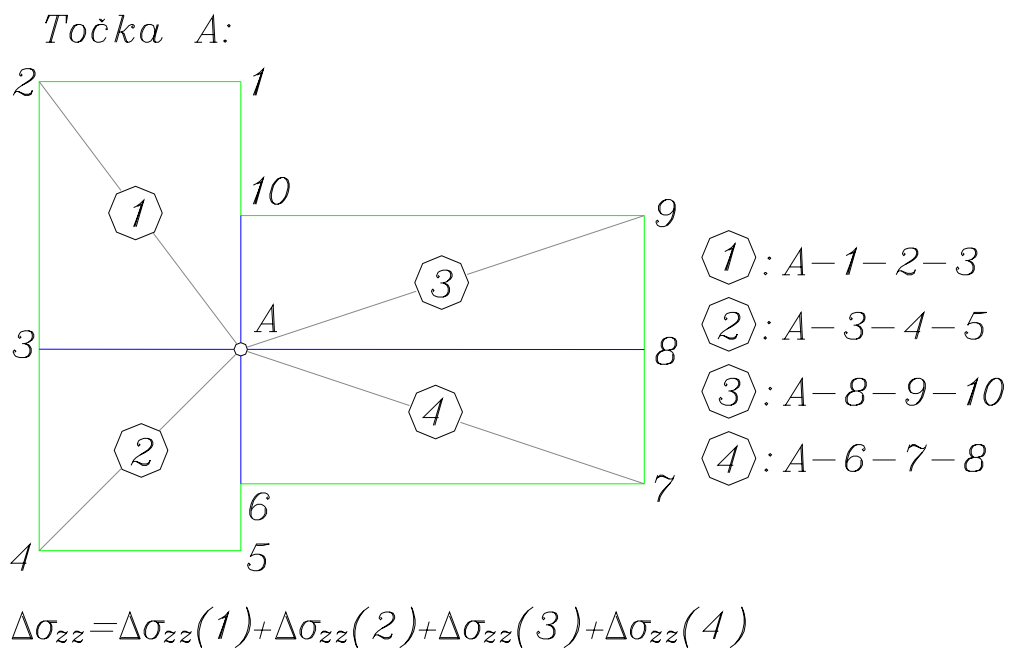
Dodatne napetosti, ki jih povzroči na površju delujoča obtežba oglate tlorisne oblike so takšne, da govorimo o prostorski spremembi napetostnega stanja.

Naslednja dva primera prikazujeta postopek izračuna dodatnih napetosti v temeljnih tleh zaradi obtežbe oglate tlorisne oblike s pomočjo rešitev, ki veljajo za izračun dodatnih napetosti pod ogliščem obtežbe pravokotne tlorisne oblike.

1. PRIMER: razdelitev obtežbe na ustrezne obtežbe pravokotnih tlorisnih oblik za izračun dodatnih vertikalnih napetosti v navpičnicah skozi točke A, B, C in D

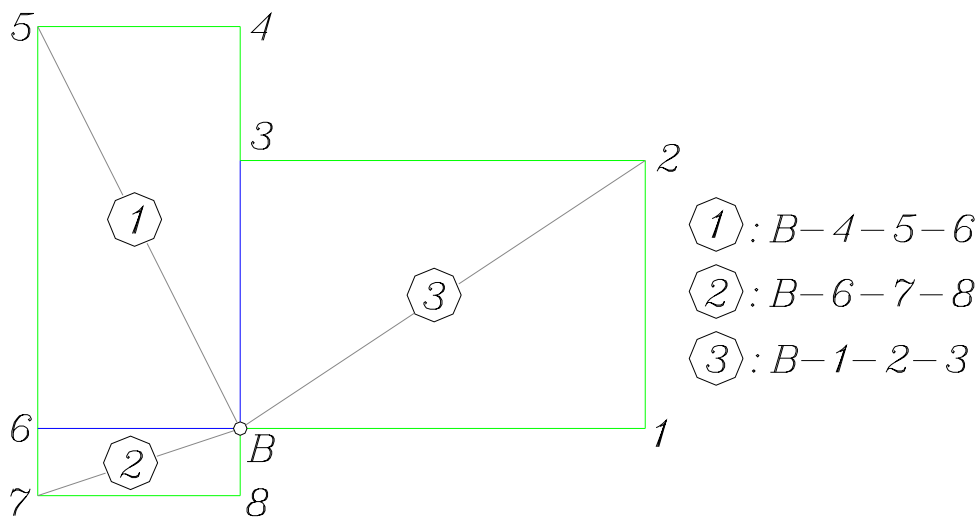


Slika 12: Tloris oglate obtežbe in točke pod katerimi želimo izračunati dodatne vertikalne napetosti



Slika 12a: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko A

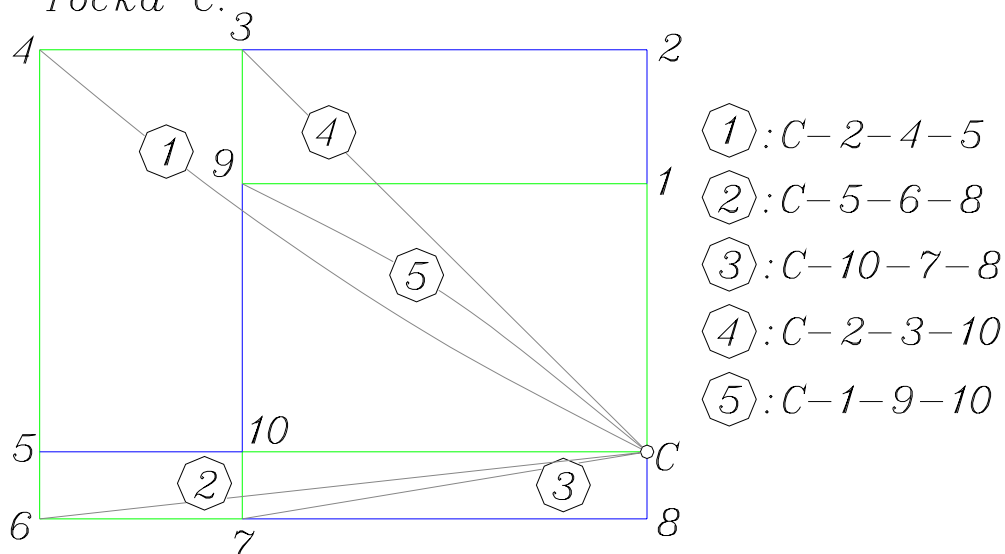
Točka B:



$$\Delta\sigma_{zz} = \Delta\sigma_{zz}(1) + \Delta\sigma_{zz}(2) + \Delta\sigma_{zz}(3)$$

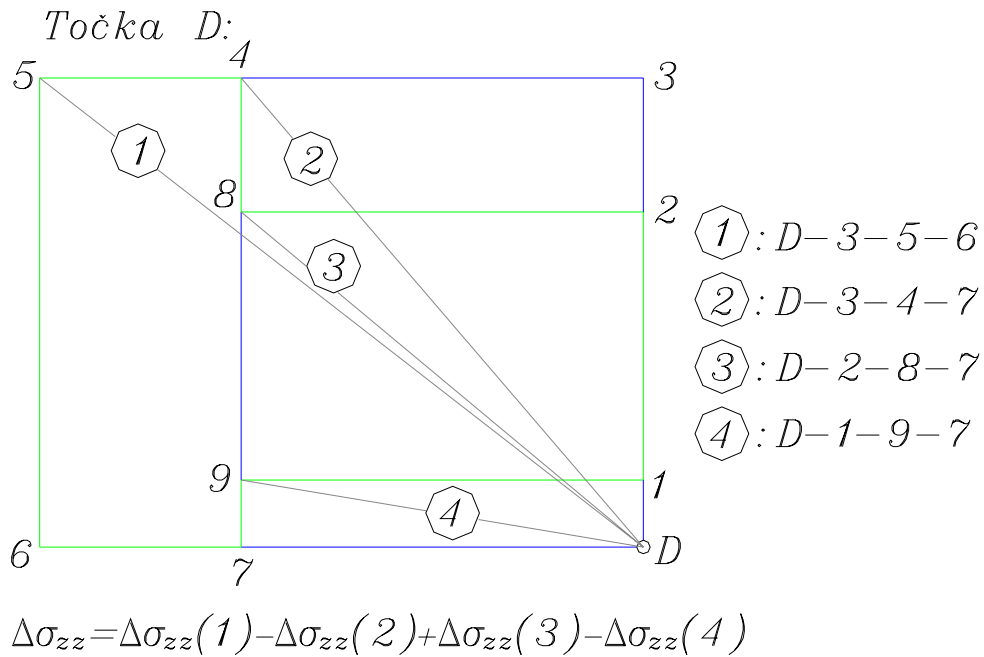
Slika 12b: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko B

Točka C:



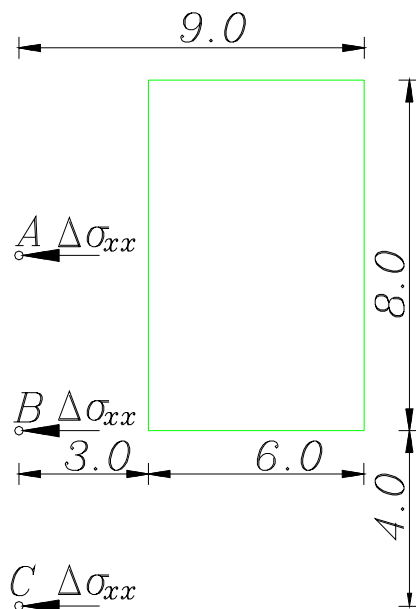
$$\Delta\sigma_{zz} = \Delta\sigma_{zz}(1) + \Delta\sigma_{zz}(2) - \Delta\sigma_{zz}(3) - \Delta\sigma_{zz}(4) + \Delta\sigma_{zz}(5)$$

Slika 12c: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko C

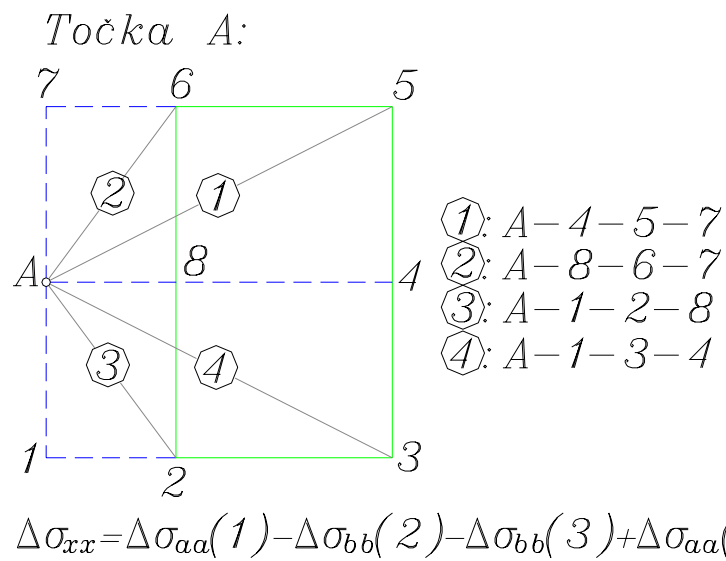


Slika 12d: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko D

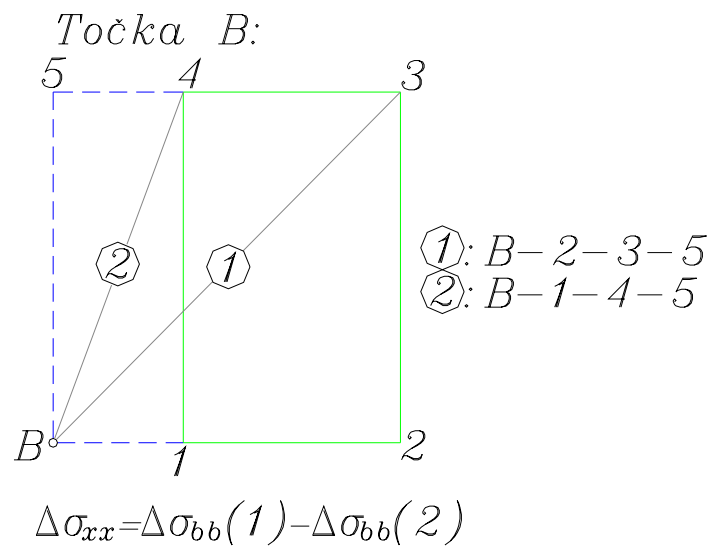
2. PRIMER: razdelitev obtežbe na ustrezne obtežbe pravokotnih tlorisnih oblik za izračun dodatnih vodoravnih napetosti v navpičnicah skozi točke A, B in C



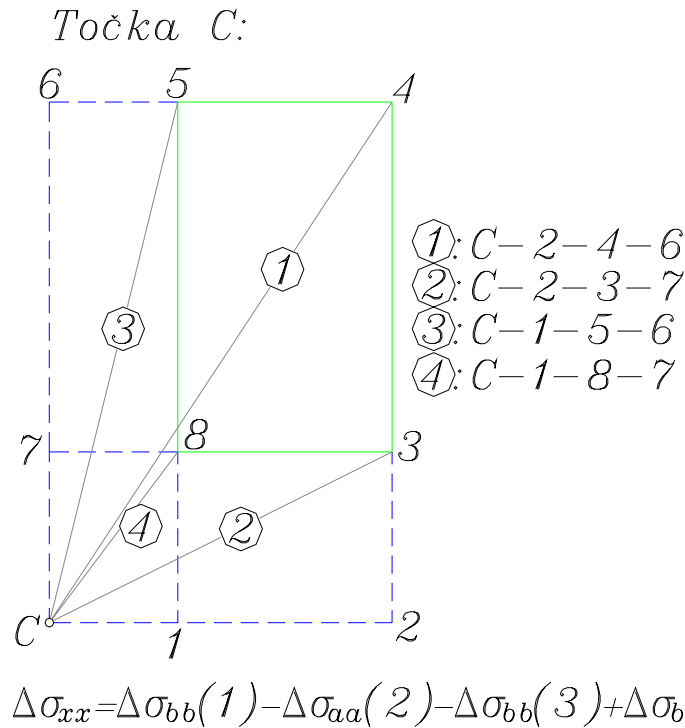
Slika 13: Tloris oglate obtežbe in točke pod katerimi želimo izračunati dodatne vodoravne napetosti



Slika 13a: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko A



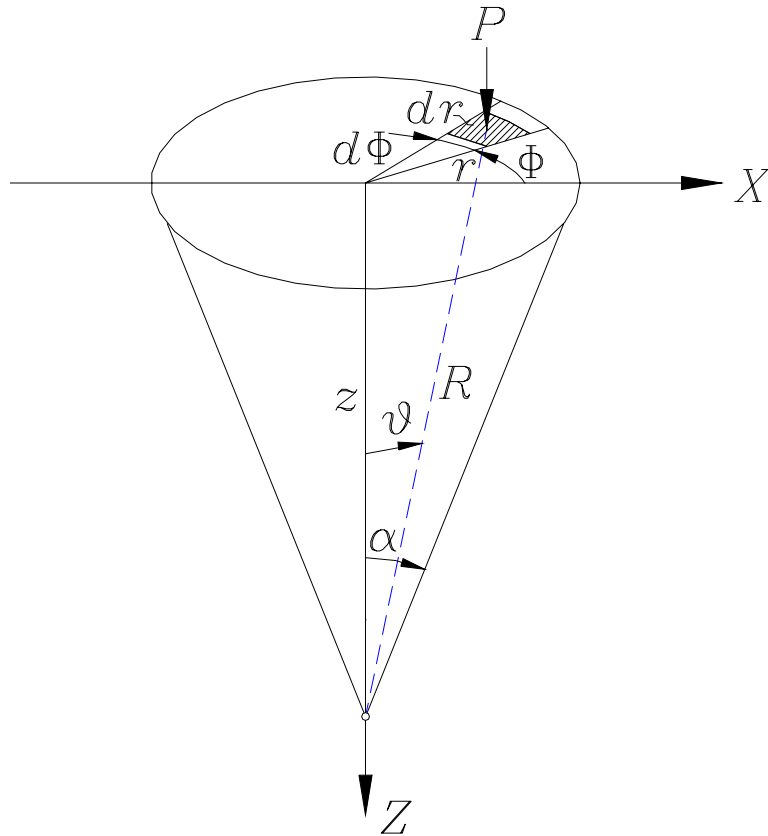
Slika 13b: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko B



Slika 13c: Razdelitev obtežbe za izračun dodatnih napetosti pod točko C

VII. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi obtežbe krožne tlorisne oblike na površju temeljnih tal (v navpičnici skozi središče obtežbe)

Za poljubno navpičnico, ki bi potekala skozi poljubno točko znotraj obrisa obtežbe krožne tlorisne oblike ne dobimo analitičnega izraza za dodatne napetosti. Integracija nas privede do eliptičnega integrala, ki je rešljiv za konkretne podatke. Analitičen izraz za dodatne napetosti dobimo samo za navpičnice, ki potekajo skozi središče obtežbe krožne tlorisne oblike.



Slika 14: Obremenitev temeljnih tal z obtežbo krožne tlorisne oblike

Vertikalne dodatne napetosti:

$$P = q dA \Rightarrow \Delta\sigma_{zz} = \int_A \frac{3q dA}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$dA = r dr d\phi \Rightarrow P = q r dr d\phi \Rightarrow$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^r \frac{3q r dr d\phi}{2\pi R^2} \cos^3 \vartheta$$

$$R = R(r, \phi) \quad , \quad \vartheta = \vartheta(r, \phi)$$

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Do končnega rezultata pridemo hitreje, če uvedemo v integraciji nove spremenljivke.

$$\tan \vartheta = \frac{r}{z} \Rightarrow r = z \tan \vartheta, dr = \frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{R} \Rightarrow R = \frac{z}{\cos \vartheta}$$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{zz} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \frac{3q (z \tan \vartheta) \left(\frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right) d\phi}{2\pi \left(\frac{z}{\cos \vartheta} \right)^2} \cos^3 \vartheta = \\ &= \frac{3q}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \end{aligned}$$

$$\int_{\vartheta}^{\alpha} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\alpha} = -\frac{1}{3} \cos^3 \alpha + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\Delta \sigma_{zz} = q (1 - \cos^3 \alpha)}$$

Vodoravne napetosti:

Enakomerna obtežba krožne tlorisne oblike povzroča v temeljnih tleh v navpičnici skozi središče obtežbe osno simetrične dodatne napetosti. Iz tega sledi, da sta dodatni vodoravni napetosti $\Delta \sigma_{xx}$ in $\Delta \sigma_{yy}$ med seboj enako veliki, vse dodatne strižne napetosti pa nične.

$$P = q dA$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \int_A \left[\Delta \sigma_r(q, dA) \cos^2 \phi + \Delta \sigma_t(q, dA) \sin^2 \phi \right]$$

$$P = q dA = qr dr d\phi = q(z \tan \vartheta) \left(\frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right) d\phi$$

$$R = \frac{z}{\cos \vartheta}$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} [\Delta \sigma_r(q, d\vartheta, d\phi) \cos^2 \phi + \Delta \sigma_t(q, d\vartheta, d\phi) \sin^2 \phi]$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi}^{2\pi} \frac{q(z \tan \vartheta) \left(\frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right) d\phi}{2\pi \left(\frac{z}{\cos \vartheta} \right)^2} \left(3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - \frac{1-2\nu}{1+\cos \vartheta} \right) \cos^2 \phi +$$

$$+ \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{q(z \tan \vartheta) \left(\frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \right) d\phi}{2\pi \left(\frac{z}{\cos \vartheta} \right)^2} (1-2\nu) \left(\frac{1}{1+\cos \vartheta} - \cos \vartheta \right) \sin^2 \phi$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \frac{3q}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=}^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \cos^2 \phi d\phi -$$

$$- \frac{q(1-2\nu)}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=}^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta (1+\cos \vartheta)} d\vartheta \cos^2 \phi d\phi +$$

$$+ \frac{q(1-2\nu)}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=}^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta (1+\cos \vartheta)} d\vartheta \sin^2 \phi d\phi -$$

$$- \frac{q(1-2\nu)}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\alpha} \int_{\phi=}^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta \sin^2 \phi d\phi$$

$$\Delta \sigma_{xx} = \frac{q}{2} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) - \frac{q(1-2\nu)}{2} (1 - \cos \alpha)$$

Geometrijska količina:

$$\tan \alpha = \frac{r}{z}$$

Celoten tenzor dodatnih napetosti:

$$\Delta \sigma_{xx} = \frac{q}{2} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) - \frac{q(1-2\nu)}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$\Delta \sigma_{yy} = \frac{q}{2} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) - \frac{q(1-2\nu)}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$\Delta \sigma_{zz} = q (1 - \cos^3 \alpha)$$

$$\Delta \sigma_{xy} = \Delta \sigma_{yz} = \Delta \sigma_{zx} = 0$$

Rešitev, ki velja za dodatne vertikalne napetosti v navpičnici skozi središče obtežbe krožne tlorisne oblike, lahko smiselno uporabimo (superpozicija) tudi za izračun dodatnih vertikalnih napetosti v temeljnih tleh:

(i)

Za izračun dodatnih vertikalnih napetosti, ki jih povzroči obtežba, ki ima v tlorisu obliko krožnega izseka z notranjim kotom β , v navpičnici skozi središče izseka v poljubni globini temeljnih tal

$$\Delta \sigma_{zz} = q (1 - \cos^3 \alpha) \frac{\beta^0}{360^0}$$

(ii)

Za izračun dodatnih vertikalnih napetosti, ki jih povzroči obtežba, ki ima v tlorisu obliko krožnega kolobarja, v navpičnici skozi središče kolobarja v poljubni globini temeljnih tal

$$\Delta \sigma_{zz} = q (\cos^3 \alpha_2 - \cos^3 \alpha_1)$$

$$r_1 > r_2 \quad , \quad \cos \alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} \quad , \quad \cos \alpha_2 = \frac{z}{\sqrt{r_2^2 + z^2}}$$

VIII. Dodatne vertikalne napetosti v polprostoru zaradi obtežbe poljubne tlorisne oblike na površju temeljnih tal

Rešitev za izračun dodatnih vertikalnih napetosti v polprostoru, ki jih povzroči na površju delujoča obtežba poljubne tlorisne oblike je podal v grafo-analitični obliki Newmark (1942). Newmark je izhajal iz rešitve za dodatne vertikalne napetosti, ki jih v navpičnici skozi središče povzroči v temeljnih tleh obtežba tlorisne oblike krožnega izseka, oziroma obtežba tlorisne oblike krožnega kolobarja.

Pri izračunu dodatnih vertikalnih napetostih v navpičnici skozi središče krožnega izseka smo ugotovili, da so dodatne vertikalne napetosti, ki jih v temeljnih tleh v navpičnici skozi središče krožnega izseka povzroči takšna obtežba, odvisne od velikosti središčnega kota β , nič pa od lege krožnega izseka v ravnini $z = 0$ glede na koordinatni sistem x, y .

Če ravnino $z = 0$, na kateri deluje obtežba poljubne tlorisne oblike, razdelimo na a enakih krožnih izsekov (enak polmer in enak središčni kot), potem vsak takšen krožni izsek (obtežba) prispeva k dodatni vertikalni napetosti enak delež:

$$\Delta \sigma_{zz} = \frac{q (1 - \cos^3 \alpha)}{a}$$

Ravnino $z = 0$, na kateri deluje obtežba poljubne tlorisne oblike, razdelimo še na b takšnih krožnih kolobarjev (isto središče, ustrezni polmeri), od katerih vsak takšen krožni kolobar, obremenjen z enakomerno obtežbo q prispeva k dodatni vertikalni napetosti v središču krožnih kolobarjev delež, ki je enak:

$$\Delta \sigma_{zz} = \frac{q}{b}$$

Na takšen način dobimo ravnino $z = 0$, na kateri deluje obtežba poljubne tlorisne oblike, razdeljeno na $a \times b$ segmentov (a krožnih izsekov in b krožnih kolobarjev). Vsak segment prispeva k dodatni vertikalni napetosti v navpičnici skozi središče krožnih izsekov oziroma kolobarjev enak delež:

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{ab}$$

Velikosti polmerov krogov, ki določajo enako vplivne kolobarje izračunamo iz osnovne enačbe za dodatne vertikalne napetosti v središču krožne obtežbe.

$$\Delta\sigma_{zz} = q(1 - \cos^3 \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1}}$$

$$\Delta\sigma_{zz} = q \left\{ 1 - \left[\left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 \right]^{-3/2} \right\}$$

$$\frac{r}{z} = \sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta\sigma_{zz}}{q}} \right)^{2/3} - 1}$$

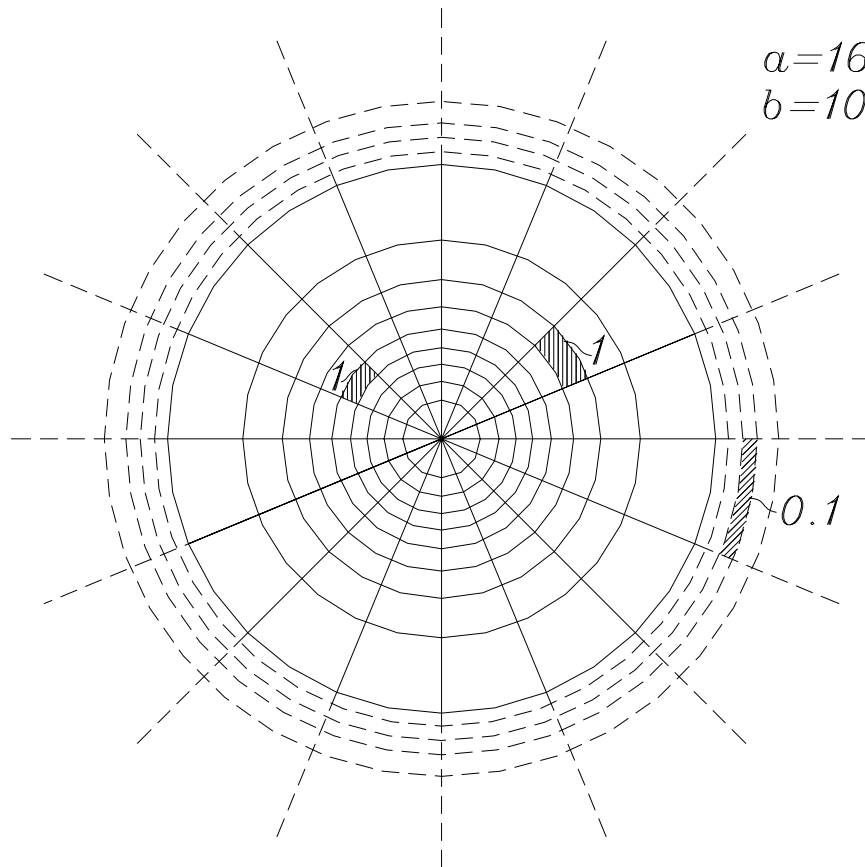
Velikost polmerov krožnih kolobarjev je odvisna od globine, v kateri želimo izračunati dodatne vertikalne napetosti. Iz zgornje enačbe izračunamo za vsak zaporedni kolobar, ki prispeva enak delež k dodatni vertikalni napetosti v navpičnici skozi središče kolobarja, količnik med polmerom takšnega kolobarja in globino v kateri računamo dodatne napetosti. Če n.pr. razdelimo ravnino $z = 0$, na kateri deluje obtežba poljubne tlorisne oblike, na $b = 10$ takšnih krožnih kolobarjev, dobimo iz zgornje enačbe:

$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{q}$	$\frac{r}{z}$	$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{q}$	$\frac{r}{z}$
0	0	0.9	1.908
0.1	0.270	0.91	1.995
0.2	0.401	0.92	2.094
0.3	0.518	0.93	2.211
0.4	0.637	0.94	2.350
0.5	0.766	0.95	2.524
0.6	0.918	0.96	2.748
0.7	1.110	0.97	3.059
0.8	1.387	0.98	3.546
0.9	1.908	0.99	4.533
1	∞	1	∞

Iz prejšnje tabele je razvidno, da so segmenti, ki so bolj oddaljeni od središča krožnih izsekov oziroma kolobarjev, površinsko večji od onih, ki so bližji središču. Vsak segment pa prispeva enak delež k dodatni napetosti v navpičnici skozi središče krožnih izsekov oziroma kolobarjev. Zadnji kolobar je omejen s količnikoma $r/z = 1.908$ in $r/z = \infty$. Če je treba, lahko zadnji krožni kolobar razdelimo še na dodatne kolobarje. V zgornji tabeli so v tretjem in četrtem stolpcu podani količniki r/z za primer, da zadnji krožni kolobar razdelimo še na 10 kolobarjev. V tem primeru prispevajo takšni segmenti 10 krat manjši delež k dodatni vertikalni napetosti.

Postopek Newmarka za izračun dodatnih vertikalnih napetosti zaradi obtežbe poljubne tlorisne oblike **v globini $z = 0$ (tik pod obtežbo) ne velja**. Velikost vertikalnih dodatnih napetosti tik pod obtežbo je odvisna od položaja točke v kateri računamo napetosti (znotraj, na konturi ali zunaj konture obtežbe). Napetosti v globini $z = 0$ določimo iz robnih pogojev.

Po Newmarkovem postopku izračunamo dodatne vertikalne napetosti v kateri koli navpičnici pod obtežbo poljubne tlorisne oblike. Točka skozi katero poteka navpičnica mora biti postavljena v središče krožnih izsekov oziroma kolobarjev. V določeni globini dobimo dodatno vertikalno napetost tako, da preštejemo število (N), z obtežbo prekritih segmentov:



Slika 15: Newmarkov postopek za izračun dodatnih vertikalnih napetosti, ki jih povzroči v temeljnih tleh obtežba poljubne tlorisne oblike

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{a b} N$$

Za večje globine ($z > 0$) postopek Newmarka lahko uporabimo na dva načina:

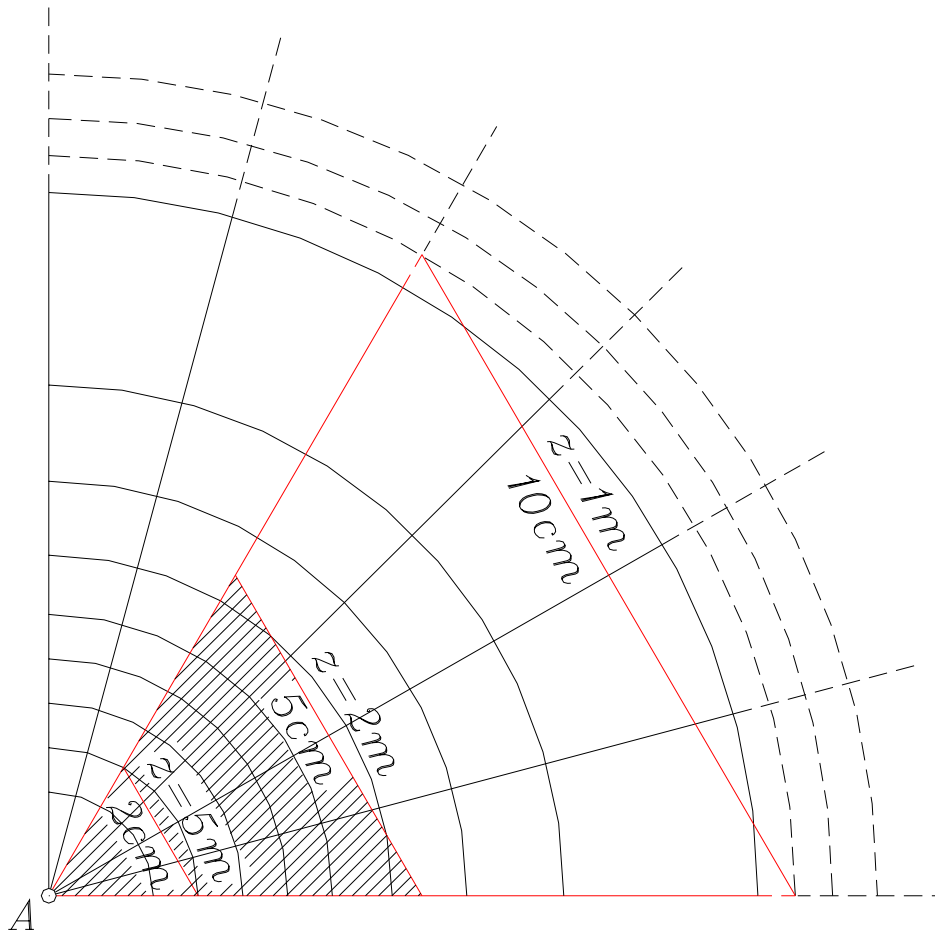
(i)

Če so obtežbe poljubnih tlorisnih oblik takšne, da jih z lahkoto rišemo v različnih merilih, potem narišemo sistem krožnih izsekov in kolobarjev v izbrani velikosti samo enkrat. Za različne globine, v katerih želimo izračunati dodatne vertikalne napetosti, rišemo obtežbo v tem primeru v različnih merilih.

Pri določitvi merila, v katerem moramo narisati obtežbo, velja pravilo, da je globina z vedno enaka enoti v kateri smo narisali krožne kolobarje. N.pr.: če si izberemo za enoto velikost 5 cm, potem so polmeri krožnih kolobarjev v cm:

$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{q}$	$\frac{r}{z}$	$r \text{ (cm)}$
0	0	0
0.1	0.270	1.4
0.2	0.401	2.0
0.3	0.518	2.6
0.4	0.637	3.2
0.5	0.766	3.8
0.6	0.918	4.6
0.7	1.110	5.6
0.8	1.387	6.9
0.9	1.908	9,5
1	∞	∞

Za različne globine izračunamo ustrezna merila, v katerih moramo risati obtežbo tako, da vedno pomeni izbrana enota, v kateri smo narisali krožne kolobarje (n.pr. 5 cm) tudi globino. Za globino $z = 1$ m, sledi merilo $M = 1:20$ ($5 \text{ cm} = z = 1 \text{ m} \Rightarrow 5 : 100 = 1 : 20$), za globino $z = 2$ m, sledi merilo $M = 1:40$, za globino $z = 5$ m, sledi merilo $M = 1:100$, ... Na naslednji sliki (Slika 16) je prikazan postopek za izračun dodatnih vertikalnih napetosti pod ogliščem obtežbe, ki ima v tlorisu obliko enakostraničnega trikotnika (dolžina stranice $s = 2$ m).



Slika 16: Izračun dodatnih vertikalnih napetosti v 3 različnih globinah zaradi obtežbe, ki ima v tlorisu obliko enakostraničnega trikotnika

Ko računamo dodatne vertikalne napetosti v vedno večjih globinah, vedno večjim globinam ustrezajo vedno manjša merila v katerih rišemo obtežbo, kar pomeni, da bo prekritih vedno manj segmentov. Dodatne vertikalne napetosti se z globino zmanjšujejo.

(ii)

Če so obtežbe poljubnih tlorisnih oblik takšne, da jih težko rišemo v različnih merilih, potem narišemo obtežbo v izbranem merilu. V tem primeru moramo za vsako globino, v kateri želimo izračunati dodatne vertikalne napetosti, narisati sistem krožnih izsekov in kolobarjev v drugačni velikosti.

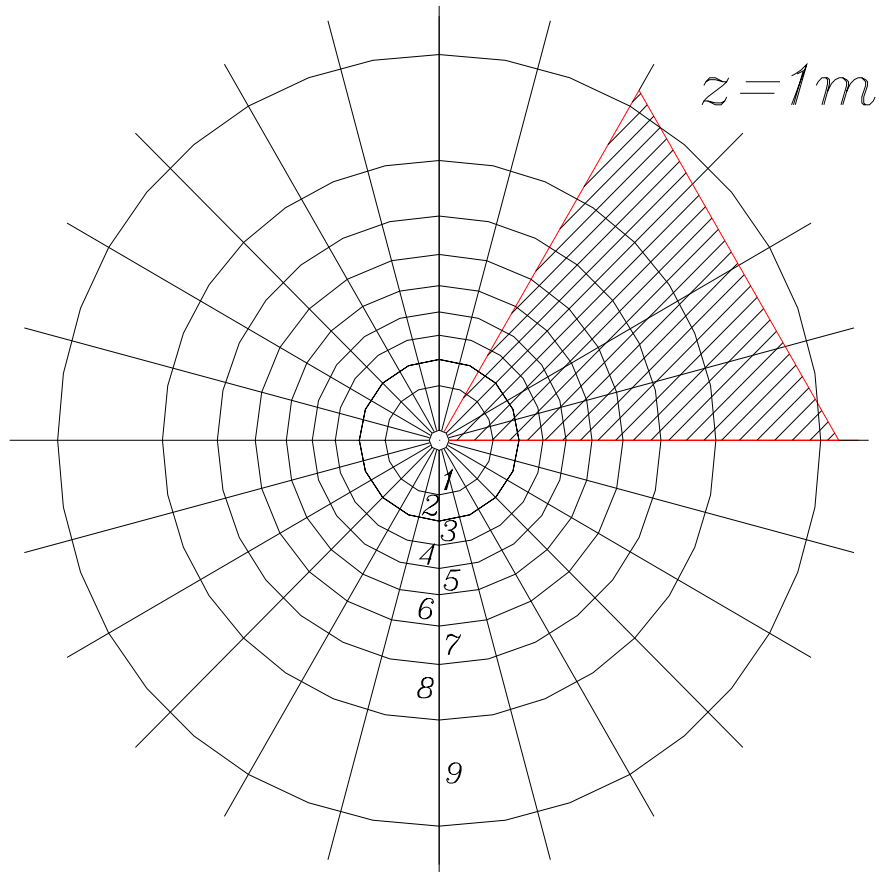
V tem primeru bo obtežba za vse globine narisana enako veliko, polmeri krožnih kolobarjev pa bodo za vedno večje globine vedno večji. Zopet velja pravilo, da izbrana globina z (enota) določa velikost polmerov

krožnih kolobarjev. Polmere krožnih kolobarjev dobimo tako, da količnike r/z množimo z globino in jih narišemo v enakem merilu, kot smo narisali obtežbo. V spodnji preglednici so podane velikosti polmerov krožnih kolobarjev za dve globini ($z = 1$ m in 5 m) ob predpostavki, da je obtežba narisana v merilu $M = 1:50$.

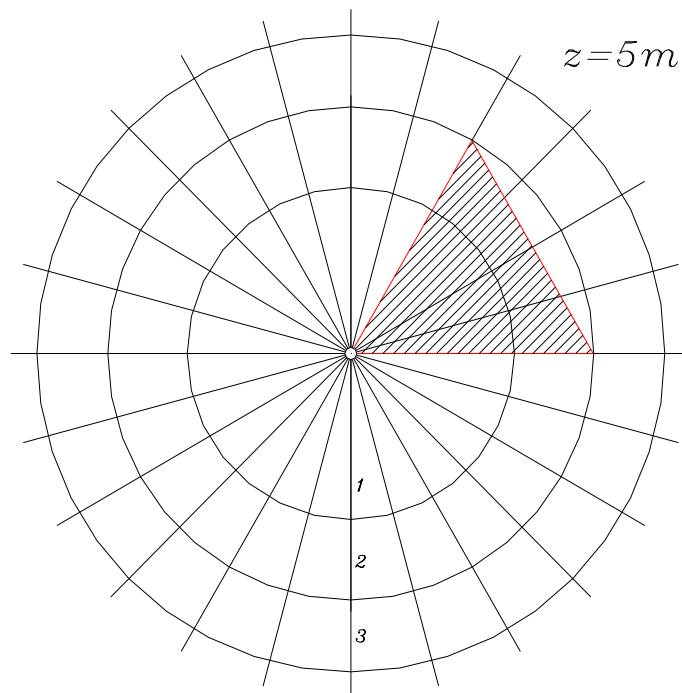
$\frac{\Delta\sigma_{zz}}{q}$	$\frac{r}{z}$	$z = 1$ m M = 1: 50 r (cm)	$z = 5$ m M = 1: 50 r (cm)
0	0	0	0
0.1	0.270	0.54	2.70
0.2	0.401	0.80	4.01
0.3	0.518	1.04	5.18
0.4	0.637	1.27	6.37
0.5	0.766	1.53	7.66
0.6	0.918	1.84	9.18
0.7	1.110	2.22	11.10
0.8	1.387	2.77	13.87
0.9	1.908	3.82	19.08
1	∞	∞	∞

Ko računamo dodatne vertikalne napetosti v vedno večjih globinah, vedno večjim globinam ustrezajo vedno večji krožni kolobarji, kar pomeni, da bo pri enako veliko narisani obtežbi prekritih vedno manj, vedno večjih segmentov. Dodatne vertikalne napetosti se z globino zmanjšujejo.

Na slikah 17 in 18 je prikazan postopek za izračun dodatnih vertikalnih napetosti v globini $z = 1$ m in $z = 5$ m v navpičnici skozi oglišče obtežbe, ki ima v tlorisu obliko enakostraničnega trikotnika (dolžina stranice $s = 2$ m). Obtežba je narisana v merilu $M = 1:50$ ($s = 4$ cm), sistema krožnih izsekov in kolobarjev pa za vsako globino v ustrezni velikosti.



Slika 17: Izračun vertikalnih dodatnih napetosti v globini $z = 1\text{ m}$



Slika 18: Izračun vertikalnih dodatnih napetosti v globini $z = 5\text{ m}$

IX. Dodatne napetosti v polprostoru zaradi obtežbe trikotne tlorisne oblike na površju temeljnih tal (v navpičnici skozi oglišče trikotnika)

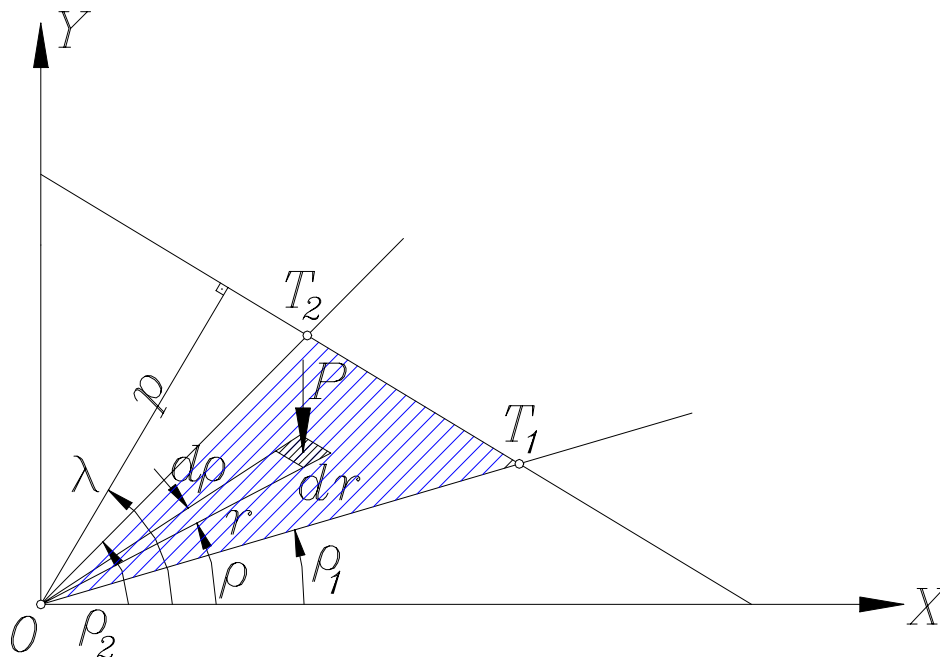
Za obtežbeni lik v ravnini $z = 0$, ki ima v tlorisu obliko poljubnega trikotnika, ki ima eno oglišče v koordinatnem izhodišču ($x = 0, y = 0$), drugi dve oglišči trikotnika pa določata točki T_1 in T_2 s koordinatama x_1 in y_1 oziroma x_2 in y_2 , lahko uporabimo naslednje geometrijske zveze:

$$dA = r dr d\phi$$

$$r = \frac{p}{\cos(\phi - \lambda)}$$

$$p = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\lambda = -\arctan \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$



Slika 19: Oznake za izračun dodatnih napetosti pod ogliščem obtežbe poljubne tlorisne oblike

S parametrom p (pravokotna razdalja od koordinatnega izhodišča do premice, ki poteka skozi oglišči 1 in 2 obtežbe trikotne tlorisne oblike) in kotom λ , ki ga oklepa pravokotnica na premico skozi točki 1 in 2 z x osjo, smo izrazili premico skozi točki 1 in 2 v polarnem zapisu.

Rešitev za dodatno vertikalno napetost, ki jo povzroči obtežba trikotne tlorisne oblike v navpičnici skozi oglišče, bomo poiskali tako, da bomo Bousinessqovo rešitev za točkovno silo integrirali po trikotni bremenski ploskvi.

$$P = q dA = q r dr d\phi$$

$$R^2 = r^2 + z^2 \quad , \quad \cos \vartheta = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\Delta \sigma_{zz} = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=0}^{p/[\cos(\phi-\lambda)]} \frac{3qr dr d\phi}{2\pi(r^2 + z^2)} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3$$

$$\Delta \sigma_{zz} = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=0}^{p/[\cos(\phi-\lambda)]} \frac{r dr d\phi}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

Pri integraciji uvedemo nove spremenljivke:

$$t = \phi - \lambda \quad , \quad dt = d\phi \quad , \quad t_1 = \phi_1 - \lambda \quad , \quad t_2 = \phi_2 - \lambda$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1} \quad , \quad \phi_2 = \arctan \frac{y_2}{x_2}$$

$$y = r^2 + z^2 \quad , \quad dy = 2 r dr$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{t=t_1}^{t_2} dt \int_{y=y_1}^{y_2} \frac{dy}{2y^{5/2}} = \frac{3qz^3}{2\pi} \int_{t=t_1}^{t_2} dt \left[-\frac{1}{3} y^{-3/2} \right]_{y_1}^{y_2} =$$

$$= -\frac{qz^3}{2\pi} \int_{t=t_1}^{t_2} dt \left[(r^2 + z^2)^{-3/2} \right]_0^{p/\cos t}$$

$$\Delta\sigma_{zz} = -\frac{qz^3}{2\pi} \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{dt}{\left[\left(\frac{p}{\cos t} \right)^2 + z^2 \right]^{3/2}} + \frac{qz^3}{2\pi} \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{dt}{z^3} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \left\{ \int_{t=t_1}^{t_2} dt - \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\cos^3 t dt}{\left[\left(\frac{p}{z} \right)^2 + \cos^2 t \right]^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \left\{ \int_{t=t_1}^{t_2} dt - \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\cos t dt}{\left[\left(\frac{p}{z} \right)^2 + \cos^2 t \right]^{3/2}} + \int_{t=t_1}^{t_2} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\left[\left(\frac{p}{z} \right)^2 + \cos^2 t \right]^{3/2}} \right\}$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (I_1 - I_2 + I_3)$$

$$\boxed{I_1 = \int dt = t}$$

$$a = \frac{p}{z}$$

$$I_2 = \int \frac{\cos t dt}{\left(a^2 + \cos^2 t \right)^{3/2}}$$

$$x = \sin t \quad , \quad dx = \cos t \, dt \quad , \quad \cos^2 t = 1 - x^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + 1 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1 + a^2)\sqrt{a^2 + 1 - x^2}}$$

$$I_2 = \frac{\sin t}{(1 + a^2)\sqrt{a^2 + \cos^2 t}}$$

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 t \cos t \, dt}{(a^2 + \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$x = \sin t \quad , \quad dx = \cos t \, dt \quad , \quad \sin^2 t = x^2 \quad , \quad \cos^2 t = 1 - x^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_3 = \int \frac{x^2 \, dx}{(a^2 + 1 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + 1 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$I_3 = \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}} - \arcsin \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}} - \arctan \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}}$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} \left[t - \frac{\sin t}{(1 + a^2)\sqrt{a^2 + \cos^2 t}} + \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}} - \arctan \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}} \right]_{t_1}^{t_2}$$

Z uvedbo substitucij:

$$a = \frac{p}{z} \quad , \quad A = \frac{a^2}{1 + a^2} \quad , \quad B = \frac{\sin t}{\sqrt{a^2 + \cos^2 t}}$$

lahko zapišemo enačbo za izračun dodatnih vertikalnih napetosti v krajši obliki:

$$z = 0$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$z \neq 0$$

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (t + AB - \arctan B) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Na podoben način kot smo izvedli enačbo za izračun vertikalnih dodatnih napetosti, lahko izvedemo tudi enačbe za izračun ostalih dodatnih napetosti, ki jih v različnih globinah (skozi navpičnico oglišča) povzroči obtežba trikotne tlorisne oblike.

Ob upoštevanju substitucij:

$$a = \frac{p}{z}, \quad b = \frac{a^2}{1 + a_2}, \quad c = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$A = \sqrt{a^2 + \cos^2 t}, \quad B = \frac{\sin t}{A}$$

$$C = \frac{\cos t + A}{2 \cos t}, \quad D = abs \frac{a + A}{\cos t}$$

$$E = abs \frac{a \sin t + A}{a \sin t - A}, \quad F = abs \frac{\cos t + A}{\cos t}$$

in geometrijskih količin:

$$p = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\lambda = -\arctan \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1}, \quad \phi_2 = \arctan \frac{y_2}{x_2}$$

$$t_1 = \phi_1 - \lambda, \quad t_2 = \phi_2 - \lambda$$

lahko zapišemo enačbe za dodatne napetosti, ki jih povzroči obtežba trikotne tlorisne oblike na površju temeljnih tal v različnih globinah polprostoru v navpičnici skozi oglišče takšne obtežbe:

$$\Delta \sigma_{xx} = \frac{q}{2\pi} \left\{ t + \frac{1}{2} \sin(2t + 2\lambda) - \arctan B - \frac{1}{A} \left[b \sin t \cos^2 \lambda + \cos^2 t \sin(t + 2\lambda) \right] - \frac{1-2\nu}{2} \left[(1 - \cos 2\lambda) (t - \arctan B) + 2 \cos t \sin(t + 2\lambda) \ln C + c \sin 2\lambda \right] \right\} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta \sigma_{yy} = \frac{q}{2\pi} \left\{ t - \frac{1}{2} \sin(2t + 2\lambda) - \arctan B - \frac{1}{A} \left[b \sin t \sin^2 \lambda - \cos^2 t \sin(t + 2\lambda) \right] + \frac{1-2\nu}{2} \left[(1 + \cos 2\lambda) (\arctan B - t) + 2 \cos t \sin(t + 2\lambda) \ln C + c \sin 2\lambda \right] \right\} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta \sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (t + AB - \arctan B) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta\sigma_{xy} = -\frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos(2t + 2\lambda) + \frac{1}{A} \left[\frac{1}{2} b \sin t \sin 2\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos^2 t \cos(t + 2\lambda) \right] + \frac{1-2\nu}{2} \left[\sin 2\lambda (\arctan B - t) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \cos t \cos(t + 2\lambda) \ln C - c \cos 2\lambda \right] \right\} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta\sigma_{yz} = \frac{q}{2\pi} \frac{a}{A} (b \sin \lambda \sin t + \cos \lambda \cos t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta\sigma_{zx} = \frac{q}{2\pi} \frac{a}{A} (b \cos \lambda \sin t + \sin \lambda \cos t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Izrazi za izračun dodatnih napetosti, ki jih povzroči obtežba trikotne tlorisne oblike so dokaj komplicirani. Uporabnost teh rešitev se pokaže takrat, ko imamo na voljo ustrezen računalniški program (n.pr.: NAPON).

Načeloma lahko za vsako obtežbo (pasovna, oglata, krožna) popišemo njeno tlorisno konturo z ustreznim številom točk (oglišč). Če računamo napetosti v različnih globinah skozi izbrano točko, ki lahko leži izven tlorisa obtežbe, na konturi ali znotraj konture obtežbe, potem lahko izračunamo dodatne napetosti zaradi takšne obtežbe tako, da obtežbo razdelimo na ustrezno število obtežb trikotne tlorisne oblike.

Vsako takšno obtežbo trikotne tlorisne oblike določajo po tri oglišča. Prvo oglišče (0) je vedno točka v kateri računamo napetosti, drugi dve oglišči (1, 2) pa sta dve zaporedni točki na konturi dejanske obtežbe. Pri številčenju oglišč tlorisne konture obtežbe pazimo, da so oglišča oštevilčena tako, da cifre naraščajo v proti urni smeri. Na ta način bodo pravilno upoštevani vplivi (seštevanje oziroma odštevanje) obtežb trikotne tlorisne oblike na katere razrežemo poljubno obtežbo. Znano je, da lahko ploščino trikotnika izračunamo iz koordinat oglišč po enačbi:

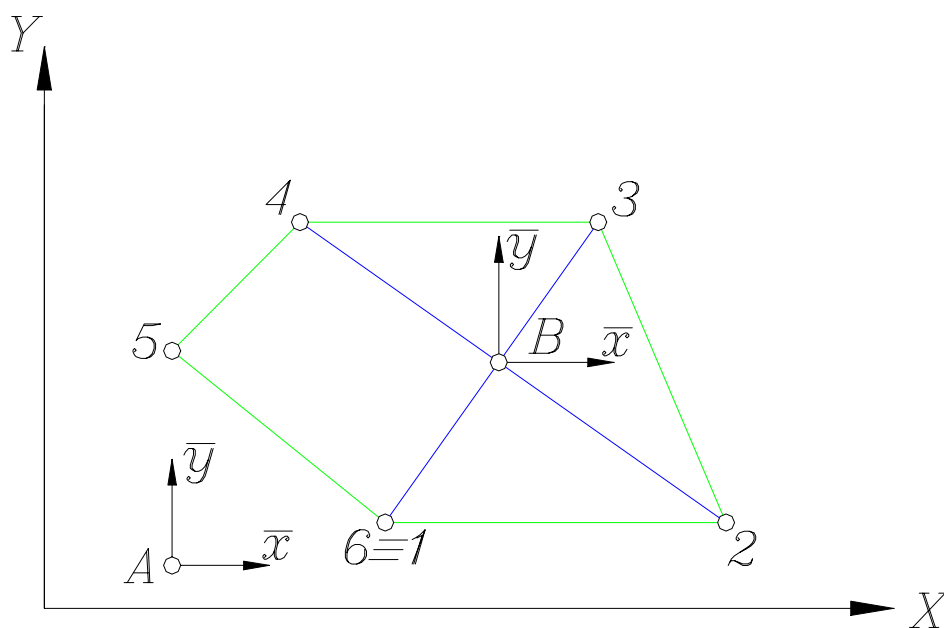
$$A = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]$$

Ploščina je pozitivna, če so točke 1, 2 in 3 popisane proti urno in negativna, če so točke 1, 2 in 3 popisane v obratni smeri.

Naslednja dva primera prikazujeta postopek izračuna dodatnih napetosti v temeljnih tleh zaradi obtežbe poljubne tlorisne oblike s pomočjo rešitev, ki veljajo za izračun dodatnih napetosti pod ogliščem obtežbe trikotne tlorisne oblike:

1. PRIMER: Obtežba ima v tlorisu obliko peterokotnika. V navpičnicah skozi točki A in B želimo izračunati v različnih globinah dodatne napetosti, ki jih povzroči takšna obtežba na površju.

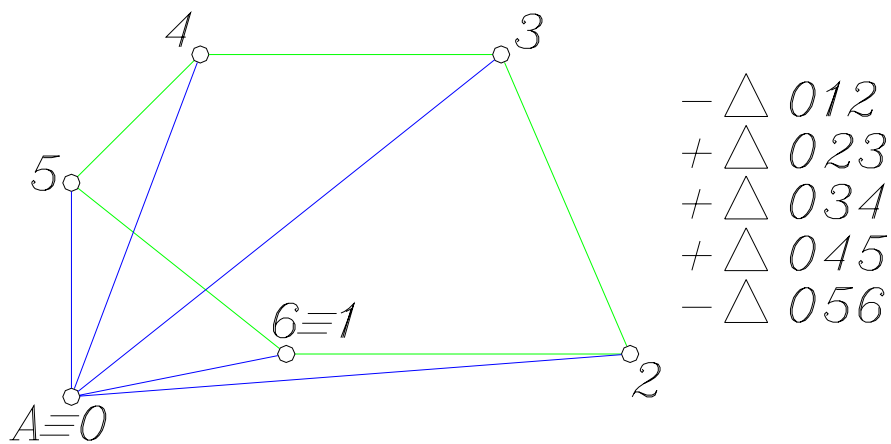
Dodatne vertikalne napetosti bi lahko izračunali po Newmarkovem postopku. S pomočjo rešitev, ki veljajo za obtežbo trikotne tlorisne oblike, lahko izračunamo vse dodatne napetosti v temeljnih tleh.



Slika 20: Tloris obtežbe, oštevilčenje oglišč konture obtežbe in mesti točk A in B pod katerima želimo izračunati dodatne napetosti

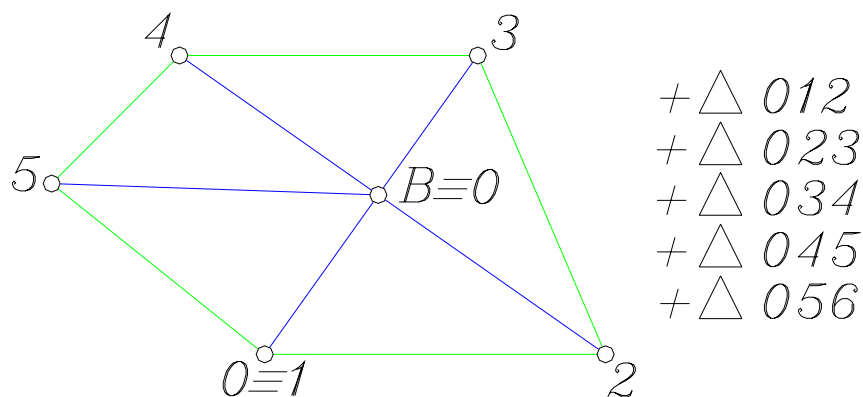
Na naslednjih dveh slikah je prikazano, kako obtežbo poljubne tlorisne oblike razdelimo na ustrezne obtežbe trikotnih tlorisnih oblik.

Točka A:



Slika 21: Razdelitev obtežbe na ustrezne obtežbe trikotnih tlorisnih oblik za izračun dodatnih napetosti v navpičnici skozi točko A

Točka B:



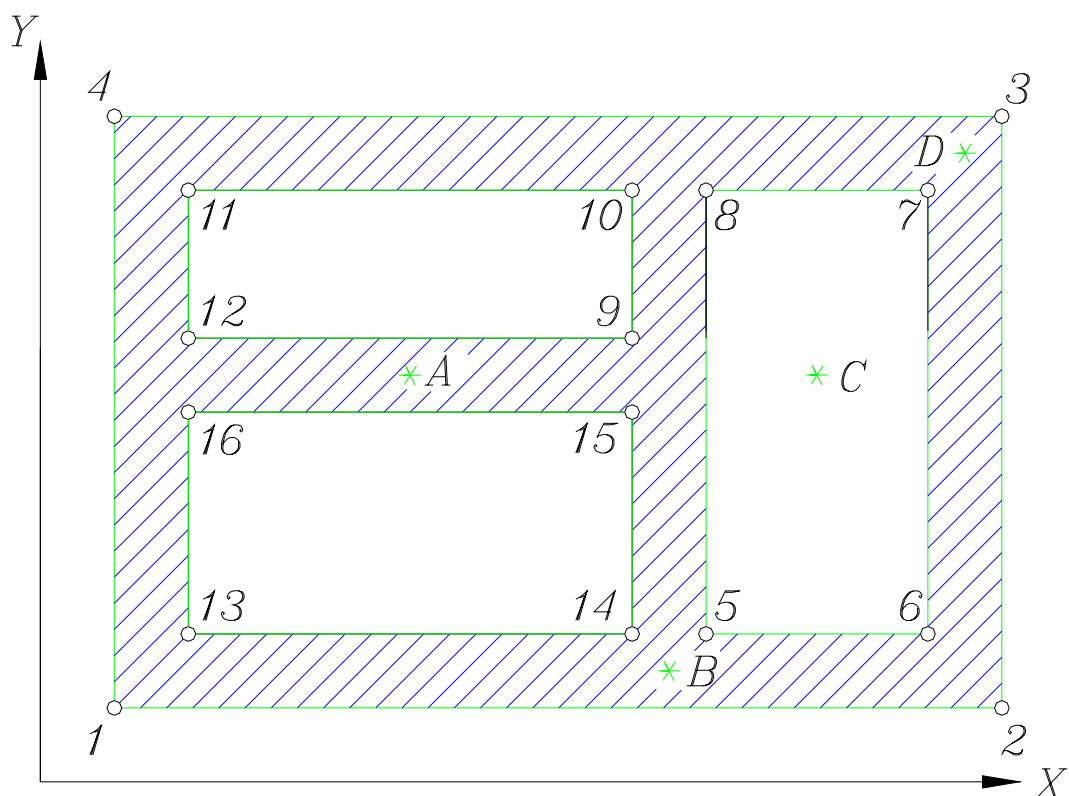
Slika 22: Razdelitev obtežbe na ustrezne obtežbe trikotnih tlorisnih oblik za izračun dodatnih napetosti v navpičnici skozi točko B

- PRIMER: V temeljnih tleh želimo izračunati dodatne napetosti, ki jih povzroči obtežba oglete tlorisne oblike (n.pr.: temelji stanovanjske hiše).

Z precejšnim naporom bi lahko izračunali dodatne napetosti tako, da bi uporabili enačbe, ki veljajo za izračun dodatnih napetosti pod ogliščem obtežbe pravokotne tlorisne oblike.

S pomočjo rešitev, ki veljajo za obtežbe trikotne tlorisne oblike in s pomočjo ustreznega računalniškega programa je takšen izračun preprost.

Ob upoštevanju načela superpozicije lahko konkretno obtežbo (glej Sliko 23) razdelimo na 4 obtežbene like:



Slika 23: Tloris temeljev stanovanjske hiše in oštevilčenje oglišč

1. obtežbeni lik (štejemo ga kot pozitivno obremenitev) določajo oglišča 1, 2, 3 in 4,

2. obtežbeni lik (štejemo ga kot negativno obremenitev) določajo oglišča 5, 6, 7 in 8,

3. obtežbeni lik (štejemo ga kot negativno obremenitev) določajo oglišča 9, 10, 11 in 12 in

4. obtežbeni lik (štejemo ga kot negativno obremenitev) določajo oglišča 13, 14, 15 in 16.

Dodatno napetost v določeni globini pod izbrano točko izračunamo tako, da seštejemo vse vplive obtežbenih likov, ki jih razdelimo na obtežbe trikotne tlorisne oblike tako, da je izbrana točka vedno skupno oglišče vseh ustreznih obtežb trikotne tlorisne oblike. Pravilen rezultat dobimo pod pogojem, da smo vsa oglišča posameznih obtežbenih likov oštevilčili tako, da cifre naraščajo v proti urni smeri.

ZAKLJUČEK

V tem poglavju smo prikazali enačbe za izračun dodatnih napetosti, ki jih v temeljnih tleh (v polprostoru) povzročijo enakomerne **gibke** obtežbe različnih tlorisnih oblik, ki obremenjujejo polprostor na površju temeljnih tal. Za obtežbe različnih tlorisnih oblik smo izhajali iz Boussinesqove rešitve za polprostor obremenjen s točkovno silo.

Pri reševanju večine vsakodnevnih inženirskih problemov, ki nastanejo pri zemeljskih delih ali temeljenju objektov, prikazani postopki za izračun dodatnih napetosti, ki jih povzročijo različne obtežbe temeljnih tal, zadoščajo.

Na podoben način, kot je iz Lammejevih parcialnih diferencialnih ravnovesnih enačb ob upoštevanju ustreznih robnih pogojev, Boussinesq poiskal rešitev za dodatne napetosti in premike v polprostoru, ki je na površju obremenjen s točkovno silo, so tudi drugi avtorji iskali izraze za dodatne napetosti in premike v polprostoru, za obtežbe, ki lahko delujejo tudi znotraj polprostora. Obtežbe tudi niso vedno vertikalne.

V strokovnem slovstvu so znane Mindlinove rešitve (1936) za izračun dodatnih napetosti in premikov v polprostoru, ki jih povzroči v polprostoru bodisi vodoravna ali vertikalna točkovna sila, ki deluje pod površjem temeljnih tal.

Če so rešitve Boussinesqa in Mindlina omejene na elastičen in izotropen polprostor, najdemo v strokovni literaturi tudi rešitve za izračun dodatnih napetosti in premikov pod različnimi obtežbami v elastičnem anizotropnem polprostoru (več slojna, različno deformabilna temeljna tla). Bolj znane so rešitve Burmistra, Foxa in Westergaarda. Običajno takšne rešitve temeljijo na določenih predpostavkah, za izračun dodatnih napetosti in pomikov pa so rešitve podane v diagramih.

Gibke obtežbe so takšne, pri katerih so dodatne vertikalne napetosti tik pod obtežbo (ravnina $z = 0$) enake obtežbi (po velikosti in po razporeditvi), vertikalni pomiki tal tik pod gibko obtežbo pa so največji v težišču (centru) obtežbe in se zmanjšujejo proti konturi obtežbe. Kot gibke obtežbe smatramo vse objekte zgrajene iz zemljin (nasipi, deponije, zemeljske pregrade).

Za razliko od gibke obtežbe so pri **togi** obtežbi dodatne vertikalne napetosti tik pod obtežbo takšne, da so manjše v težišču (centru) obtežbe in večje na konturi obtežbe. Tik pod togo obtežbo so vertikalni premiki tal enaki, če je toga obtežba enakomerna in linearno razporejeni, če je obtežba po površini tal neenakomerno razporejena.

Togost obtežbe definiramo s koeficientom relativne togosti, ki je definiran z enačbama:

$$K = \frac{E_b}{12 E_s} \left(\frac{d}{L} \right)^3, \quad K = \frac{E_b}{12 E_s} \left(\frac{d}{D} \right)^3$$

Prva enačba velja za temelje oglate tlorisne oblike (d pomeni višino temelja, L pomeni daljšo tlorisno dimenzijo temelja), druga enačba pa velja za temelje krožne oblike (D pomeni premer krožnega temelja). Z E_b smo označili elastični modul betona (temelja), z E_s pa elastični modul tal pod temeljem.

Za togo obtežbo smatramo takšno obtežbo (temelje objektov), za katero je količnik relativne togosti večji od vrednosti 0.4 ($K > 0.4$).

Za obtežbe (temelje) pri katerih je količnik relativne togosti večji od vrednosti 0 (gibka obtežba) in manjši od vrednosti 0.4 (toga obtežba), pravimo da so to **trme** obtežbe. Tik pod enakomerno trmo obtežbo niso niti dodatne vertikalne napetosti, niti vertikalni pomiki tal enakomerno razporejeni.

Ne glede na to ali je obtežba gibka, toga ali trma, povzroči obtežba enake oblike, enakih tlorisnih dimenzij in iste jakosti (n.pr. enakomerno razporejena) tik pod obtežbo enako spremembo prostornine temeljnih tal. Če izrazimo takšno spremembo prostornine z enačbo:

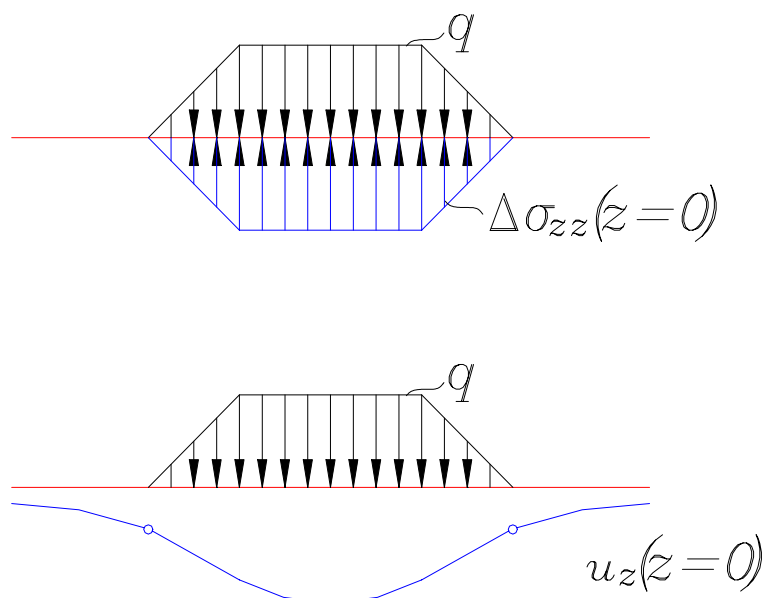
$$\Delta V = \int_A u_z dA = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} u_z dx dy$$

kjer pomeni u_z premik površja v različnih točkah tik pod obtežbo, A pa velikost bremenske ploskve. Če je obtežba enakomerna, so premiki tal tik pod togo obtežbo enako veliki, tik pod gibko obtežbo pa različni.

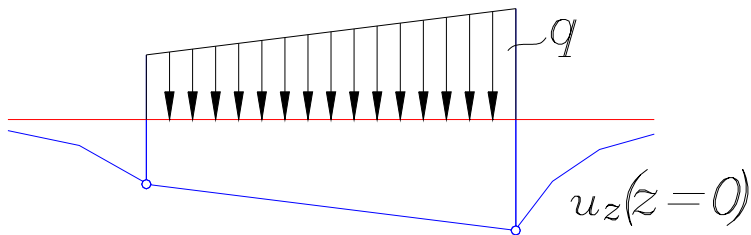
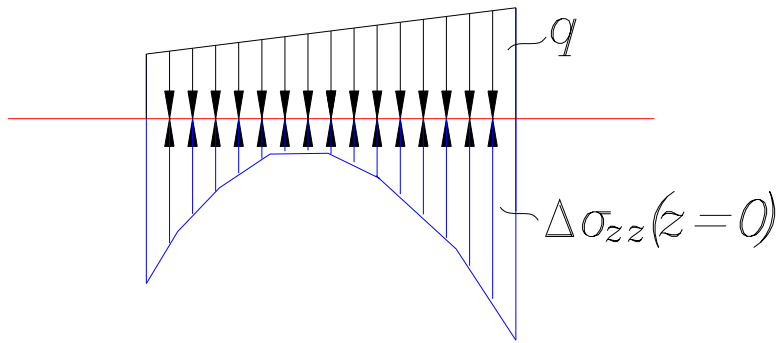
Iz pogoja enake spremembe prostornine tal pod gibko, togo ali trmo obtežbo, lahko iz premikov površja tal, ki jih povzroči gibka obtežba, izračunamo povprečno vrednost premika, ki je istočasno tudi vrednost premika površja tal, ki bi ga povzročila trma obtežba.

$$\Delta V = \bar{u}_z \int_A dA = \bar{u}_z \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} dx dy \Rightarrow \bar{u}_z = \frac{\Delta V}{A}$$

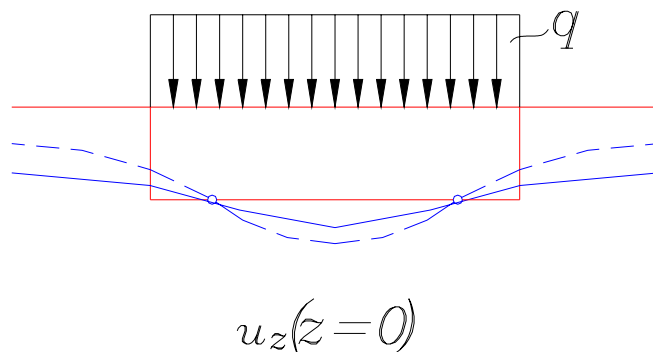
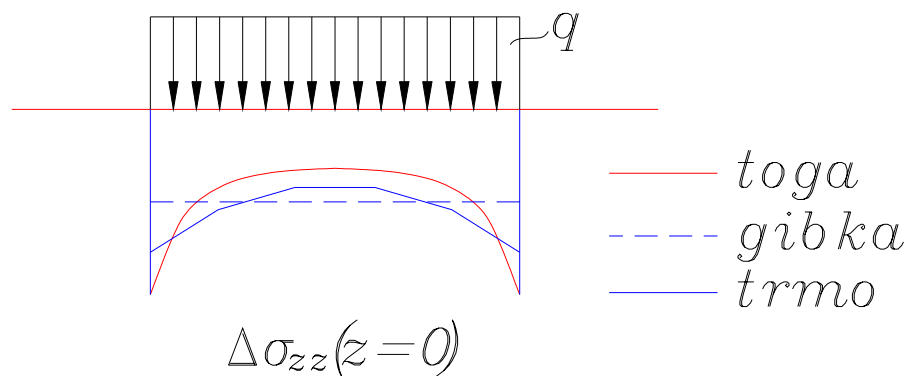
Na naslednjih slikah so prikazani diagrami dodatnih napetosti in vertikalnih pomikov tik pod gibko obtežbo (n.pr.: cestni nasip), tik pod togo obtežbo (n.pr.: ekscentrično obremenjen armirano-betonski pasovni temelj) in tik pod enakomerno pasovno obtežbo različne togosti.



Slika 24: Dodatne vertikalne napetosti in premiki temeljnih tal tik pod gibko obtežbo (n.pr.: cestni nasip)



Slika 25: Dodatne vertikalne napetosti in premiki temeljnih tal tik pod togo obtežbo (n.pr.: pasovni armirano-betonski temelj)



Slika 26: Dodatne vertikalne napetosti in premiki temeljnih tal tik pod enakomerno pasovno obtežbo različnih togosti

Zakaj sploh računamo napetosti v temeljnih tleh?

Temeljna tla sestojijo iz različnih plasti zemljin in/ali kamnin. Posamezne plasti se med seboj razlikujejo po legi v polprostoru, po debelini in po mehanskih lastnostih (deformabilnost, prepustnost in trdnost).

Predvsem za zemljine velja, da so to kompoziti, sestavljeni iz zrnja različnih velikosti in oblik, med zrnjem pa so praznine v celoti zapolnjene z vodo ali z zrakom ali pa deloma z zrakom in deloma z vodo.

Vse mehanske lastnosti (deformabilnost, prepustnost in trdnost) so odvisne od gostote (**poroznosti**). Poroznost zemljin se spreminja v odvisnosti od spremembe napetostnih stanj in s časom. Prvi odgovor na zastavljeno vprašanje **ZAKAJ?** je:

(1)

V temeljnih tleh moramo poznati **prvotno napetostno stanje** (običajno zaradi lastne teže tal), **dodatne napetosti**, ki jih povzročijo obtežbe temeljnih tal (obtežbe gradbenih objektov) in **nova napetostna stanja** zato, **da bi lahko določili mehanske lastnosti** (deformabilnost, prepustnost in trdnost) **zemljin in/ali kamnin**.

Običajno zgodovino napetostnih sprememb simbolično označimo z indeksom (grške črke):

prvotno napetostno stanje tako označimo s: $\sigma_{ij} \alpha$.

dodatne napetosti označimo s: $\Delta\sigma_{ij}$

novo napetostno stanje pa označimo s: $\sigma_{ij} \beta$.

Novo napetostno stanje v temeljnih tleh (zaradi gradbenega posega) dobimo tako, da k prvotnim napetostim (običajno zaradi lastne teže tal) prištejemo dodatne napetosti (zaradi obtežbe temeljnih tal). Napetosti in dodatne napetosti v polprostoru pa lahko računamo v različnih koordinatnih sistemih (cilindrični, Kartezijev), lahko pa napetosti in njihove spremembe podajamo tudi z glavnimi napetostmi ali celo z oktaedričnimi vrednostmi napetosti (z invariantami napetostnega tenzorja).

Pri tem velja opozorilo, da posamezne komponente napetostnega tenzorja (izražene v cilindričnem ali kartezijevem koordinatnem sistemu) lahko seštevamo med seboj, le če so izražene v istem koordinatnem

sistemu. Ne smemo pa seštevati tenzorjev, ki so zapisani v različnih koordinatnih sistemih, niti glavnih ali oktaedrskih napetosti, oziroma invariant napetostnega tenzorja.

$$\sigma_{xx\beta} = \sigma_{xx\alpha} + \Delta\sigma_{xx} \quad , \quad \sigma_{xy\beta} = \sigma_{xy\alpha} + \Delta\sigma_{xy}$$

$$\sigma_{1\beta} \neq \sigma_{1\alpha} + \Delta\sigma_1 \quad , \quad \sigma_{\beta}^o \neq \sigma_{\alpha}^o + \Delta\sigma^o$$

Mehanske lastnosti zemljin določamo eksperimentalno s terenskimi ali laboratorijskimi preizkusi. Pogostokrat so mehanske lastnosti (deformabilnost, prepustnost in trdnost) podane v odvisnosti od prvotnih in novih napetostnih stanj, ki so bodisi izražene z glavnimi napetostmi ali oktaedrskimi napetostmi ali invariantami napetostnega tenzorja.

Kako izračunamo glavne napetosti?

Glavne napetosti izračunamo iz lastne ali karakteristične enačbe napetostnega tenzorja (predmeta Mehanika trdnih teles in Trdnost):

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Iz karakteristične enačbe napetostnega tenzorja (polinom 3. stopnje) dobimo tri korene (glavne napetosti), ki jih z indeksi 1, 2 in 3 razvrstimo po velikosti ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

Oktaedrski napetosti (normalna in tangencialna oziroma strižna napetost) delujeta v ravnini, katere normala oklepa enak kot z osmi koordinatnega sistema, ki ga določajo smeri glavnih napetosti σ_1 , σ_2 in σ_3 . Normalno napetost σ^o , oziroma strižno oktaedrsko napetost τ^o izračunamo po enačbah:

$$\sigma^o = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\tau^o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

ali

$$\sigma^o = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

$$\tau^o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

(2)

Nova napetostna stanja, ki jih v temeljnih tleh povzročijo različne obtežbe temeljnih tal (gradbeni objekti) moramo poznati tudi zato, da lahko presodimo ali so nova napetostna stanja v temeljnih tleh **še manjša od mejnih napetostnih stanj**. Mejna napetostna stanja so takšna, pri katerih bi prišlo v temeljnih tleh do naraščanja deformacij (premikov) proti brezkrainim vrednostim. Ali drugače povedano: pri mejnih napetostnih stanjih v tleh pride do porušitve tal in gradbenega objekta.

(3)

Zemljine so kompoziti, torej niso homogeni materiali. Deformacije temeljnih tal (zemljine) se zaradi spremembe napetostnih stanj izvršijo na račun zmanjševanja praznin med zrnjem. Običajno se deformacije tal, čeprav jih obremenimo hipno, ne izvršijo takoj. Zato da se iz praznin med zrnjem iztisne ustrezna prostornina zraka na površje temeljnih tal ali da se iz praznin med zrnjem izcedi ustrezna prostornina vode na površje tal, je potreben ustrezen čas. Pravimo, da se temeljna tla (zemljina) pod obtežbo **konsolidirajo** (gostijo).

V procesu konsolidacije se spreminja razmerje med medzrnski tlaki (**efektivne napetosti**) in med tlakom v prazninah (**pornimi tlaki**) temeljnih tal (zemljine). Vsaka obtežba temeljnih tal spremeni napetostna stanja v temeljnih tleh (zemljini). Dodatne napetosti, ki jih povzročijo v temeljnih tleh obtežbe na površju tal in ki smo jih izračunali iz ravnovesnih enačb, imenujemo **totalne dodatne napetosti**. Za zemljine lahko zapišemo naslednje zveze med totalnimi in efektivnimi napetostmi in pornimi tlaki:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} u$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} u$$

ali

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma'_{ij} + \delta_{ij} \Delta u$$

$$\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \delta_{ij} \Delta u$$

Napetosti, ki so dodatno označene s črtico so efektivne napetosti, druge napetosti (brez črtice) so totalne napetosti. Kroneckerjev simbol δ_{ij} ima vrednost 1, če sta indeksa i in j enaka (normalne napetosti) in 0 če sta indeksa i in j različna (strižne napetosti). Porni tlak (označili smo ga s črko u) je hidrostatska napetost (normalna in enako velika v vseh smereh).

Kot smo že ugotovili, se vsota efektivnih napetosti in pornih tlakov, to so totalne napetosti, s časom ne spreminja, pač pa se s časom spreminja razmerje med efektivnimi napetostmi in pornimi tlaki. Ker se zrak in voda iz zemljine iztiskata, se porni tlak zato zmanjšuje, zrnje prehaja v

gostejšo lego, na ta račun pa se medzrnski tlaki (efektivne napetosti) povečujejo.

Če želimo iz znane vsote dveh količin (totalne napetosti) izraziti eno količino (n. pr. efektivne napetosti), moramo poznati bodisi drugo količino (n. pr. porni tlak), ali pa razmerje med obema količinama.

Pri zemljinah lahko pri znani spremembi totalnih napetosti izračunamo v vsakem času spremembo pornih tlakov (difuzijska enačba), torej bomo efektivne napetosti izračunali kot razliko totalnih napetosti in pornih tlakov.

Da bi v temeljnih tleh (zemljini) lahko izračunali časovne spremembe pornih tlakov (posledično spremembe efektivnih napetostnih stanj) moramo rešiti difuzijsko enačbo. Difuzijska enačba je parcialna diferencialna enačba. Da bi lahko rešili **difuzijsko enačbo** moramo v temeljnih tleh (zemljini) poznati dodatne napetosti (dodatne totalne napetosti), ki jih v temeljnih tleh povzročijo obtežbe na površju tal.

(4)

Del deformacij temeljnih tal – del posedkov površja temeljnih tal oziroma usedkov objekta (obtežbe) – lahko izračunamo tudi s pomočjo rezultatov **edometriškega preizkusa** valjastih vzorcev zemljin, če poznamo spremembe vertikalnih normalnih napetosti v temeljnih tleh.

Ker so edometriški preizkusi zelo uveljavljeni v inženirski praksi (enostavni in hitri) pogostokrat posedke tal (objektov) računamo po prej nakazanem postopku. Drugače povedano: spremembe napetostnih stanj moramo poznati tudi za **izračun deformacij (posedkov)** temeljnih tal.

Na koncu se postavlja še vprašanje v kakšnem obsegu (število navpičnic, število globin, ...) moramo računati napetostna stanja v temeljnih tleh. Obseg izračunov zavisi od:

- sestave temeljnih tal,
- velikosti obtežbe,
- tlorisne oblike obtežbe,
- gradbenega objekta (nasip, objekti s statično določeno konstrukcijo, objekti s statično nedoločeno konstrukcijo, ...),
- od natančnosti vseh vhodnih podatkov in
- od uporabljenih računskih postopkov oziroma metod.